ז' בניסן תשע"ג 18.3.2013

קבוצת ירדן, מחנה אביב

1. נזכיר שמצולע זה קו שבור סגור שלא חותך את עצמו.
א. מהו המספר הגדול ביותר של נקודות חיתוך שעלולות להיות למשולש ומחומש?
ב. מהו המספר הגדול ביותר, אם בנוסף נתון שהמחומש קמור?

2. מצא\י את כל הסדרות ההנדסיות הסופיות המורכבות ממספרים שלמים חיוביים שאיברן הראשון הוא 1, כך שסכומן הוא:
א. חזקה שלמה של 2.
ב. חזקה שלמה של 3.

3. משחק מחשב מתחיל עם עמודה של N קוביות. יורם בוחר בכל מהלך שלו קובייה עליונה באחת העמודות (לא על הקרקע), שמימין לה אין קובייה באותו גובה. המחשב דוחף אותה ימינה עד שהיא נופלת (ונוחתת על הקרקע או על עמודה נמוכה יותר). מטרתו של יורם היא להגיע למצב, בו כל הקוביות על הקרקע. מהי הכמות הקטנה ביותר של מהלכים שהוא צריך לבצע על מנת לסיים את המשחק
א. אם $N = 7$?
ב. אם $N = 32$?

4. מעגלים α, β נחתכים בשתי נקודות ומשיקים מבפנים למעגל γ שמכיל את שניהם בנקודות K ,L בהתאמה. מיתר AB של המעגל γ מכיל את שתי נקודות החיתוך של α, β. המיתר AB מחלק את γ לשתי קשתות שאמצעיהן M, N. הישרים NL, MK נפגשים בנקודה P; הישרים NK ,ML נפגשים בנקודה Q. המשיקים למעגל γ בנקודות K, L נפגשים בנקודה T. הוכח\י: T היא אמצע PQ.

בהצלחה!

ז' בניסן תשע"ג 18.3.2013

קבוצת רותם, מחנה אביב

1. מעגלים α,β נחתכים בשתי נקודות ומשיקים מבפנים למעגל γ שמכיל את שניהם בנקודות K, L בהתאמה. מיתר AB של המעגל γ מכיל את שתי נקודות החיתוך של α,β. המיתר AB מחלק את γ לשתי קשתות שאמצעיהן M, N. הישרים NL, MK נפגשים בנקודה P; הישרים ML, NK נפגשים בנקודה Q. המשיקים למעגל γ בנקודות K, L נפגשים בנקודה T. הוכח\י: T היא אמצע PQ.

2. משחק מחשב מתחיל עם עמודה של N קוביות. יורם בוחר בכל מהלך שלו קובייה עליונה באחת העמודות (לא על הקרקע), שמימין לה אין קובייה באותו גובה. המחשב דוחף אותה ימינה עד שהיא נופלת (ונוחתת על הקרקע או על עמודה נמוכה יותר). מטרתו של יורם היא להגיע למצב, בו כל הקוביות על הקרקע. מהי הכמות הקטנה ביותר של מהלכים שהוא צריך לבצע על מנת לסיים את המשחק (התשובה תלויה ב-N).

3. נתון $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=1$.
הוכיחו: $a\sqrt{2a+3bc}+b\sqrt{2b+3ac}+c\sqrt{2c+3ab}\geq 1$.

בהצלחה!

ח' בניסן תשע"ג 19.3.2013

קבוצת רותם, מחנה אביב

1. ABC משולש בו $AB \neq AC$, ומרכז המעגל החוסם שלו הוא O. חוצה הזווית של $\sphericalangle BAC$ פוגש את BC ב-D. הנקודה E סימטרית ל-D ביחס לאמצע BC. נבחר נקודות X, Y על AO, AD בהתאמה עבורן הישרים DX, EY מאונכים ל-BC.
הוכח כי המרובע $BXCY$ חסום במעגל.

2. יהיו f, g פולינומים בעלי מקדמים שלמים (השונים מ-0 זהותי), עבורם $\deg f > \deg g$. נניח שעבור אינסוף מספרים ראשוניים p, לפולינום $pf + g$ יש שורש רציונאלי. הוכח כי ל-f יש שורש רציונאלי.

3. עמודות ושורות של לוח $3n \times 3n$ ממוספרות מ-1 עד $3n$ לפי הסדר הטבעי. כל משבצת (x, y) צבועה באחד מבין שלושה צבעים: ארגמן, בז', או ג'ייד, בהתאם לשארית של $x + y$ מודולו 3. על כל משבצת מניחים כלי משחק בצבע ארגמן, בז', או ג'ייד, כך שיש בדיוק $3n^2$ כלים מכל צבע.
נתון שאפשר לבצע תמורה של הכלים, כך שכל כלי יזוז מרחק של d לכל היותר ממיקומו המקורי, כך שכל כלי ארגמני יחליף כלי בצבע בז', כלי בז' יחליף כלי ג'ייד, וכלי ג'ייד יחליף כלי ארגמני. הוכח שבעצם אפשרי גם לבצע תמורה, כך שכל כלי יזוז במרחק $d + 2$ לכל היותר, ויגיע למשבצת בצבע שלו.

בהצלחה!

ט' בניסן תשע"ג 20.3.2013

קבוצת ירדן, מחנה אביב

1. האם קיימים 5 קטעים שאורכיהם מספרים ממשיים שונים בזוגות, כך שיש לפחות 4 דרכים שונות לבחור מתוכם שלישיית קטעים, שמהם ניתן להרכיב משולש ישר זווית?

2. על הלוח רשומים מספרים 357, 50. שניים משחקים. בכל תור מותר להחליף (x,y) ב-$(x-y,y)$ או $(x-2y,y)$, בתנאי ששני המספרים בזוג יישארו חיוביים. מי שאין לו מהלכים מפסיד. מי מנצח?

3. מעגל שקוטרו AC חותך את צלעותיו של מרובע ABCD בנקודות P, Q, R, S (כאשר P על הצלע AB, Q על הצלע BC). הוכח\י שאם הישרים AC, PQ, RS נפגשים בנקודה אחת, אז אלכסוני המרובע ABCD מאונכים.

4. נתונים שלושה מספרים ממשיים a,b,c המקיימים $ab+bc+ca=3$.
הוכח\י כי $\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{1+b^2+c^2}+\frac{1}{1+c^2+a^2}\le 1$.

בהצלחה!

ט' בניסן תשע"ג 20.3.2013

קבוצת רותם, מחנה אביב

1. מצא את כל השלשות $x \le y \le z$ של מספרים שלמים חיוביים עבורן
$x^3\left(y^3+z^3\right)=2012\left(xyz+2\right)$.

2. בלוח 999×999, משבצות מסוימות נצבעו בלבן והאחרות באדום. יהי Γ מספר השלשות (A , B , C) של משבצות, המקיימות בו-זמנית את התנאים הבאים:

(i) A , B באותה שורה,

(ii) B , C באותה עמודה,

(iii) A , C לבנות, B אדומה.

מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של Γ ?

3. יהי ABC משולש החסום במעגל ω, ויהי ℓ ישר שאין לו אף נקודה משותפת עם ω. נסמן ב-P את עקב האנך ממרכז ω ל-ℓ. הישרים AB, AC, BC חותכים את ℓ בנקודות X, Y, Z, השונות מ-P, בהתאמה. הוכח שלמעגלים החוסמים של המשולשים AXP, BYP, CZP יש נקודה משותפת שונה מ-P; או ששלושת המעגלים משיקים זה לזה ב-P.

בהצלחה!

י' בניסן תשע"ג 21.3.2013

תחרות קבוצתית, מחנה אביב

1. שניים משחקים משחק על המישור. כל אחד בתורו מעביר קו ישר. לאחר 50 תורות, המשחק נגמר. השני מנצח אם המישור חולק לכמות זוגית של חלקים.
א. האם יש לו אסטרטגיה מנצחת?
ב. אותה שאלה, אבל המטרה של השני היא שבסוף יהיה מספר אי-זוגי של קווים.
ג. כמו השאלה המקורית, אבל כל התורות חוץ מהאחרון מתבצעים על ידי השחקן הראשון.

2. עבור מצולע קמור בעל 7 צלעות, נסמן ב-P את היקפו, וב-D את סכום אורכי כל האלכסונים שלו. מצאו את α הגדול ביותר, עבורו בהכרח $D \geq \alpha \cdot P$.

3. סדרה מוגדרת על ידי כלל נסיגה $x_{k+1} = x_k^2 - 2$, עם תנאי התחלה $x_0 = 3.3333...$. חשבו את 10 הספרות הראשונות מימין לנקודה העשרונית של המספר $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{10}$.

4. נתון משולש ABC בו AC = AB. תהי K אמצע BC. P הינה נקודה על הישר AK שאינה A. מעגל דרך B ו-P חותך את AK בפעם השנייה ב-Q, ואת AB בפעם השנייה ב-R. PR חותך את המעגל החוסם של AQR בפעם השנייה ב-T. הוכח כי הנקודות A, C, P, T נמצאות על מעגל אחד.

5. כדורגל הוא פאון קמור המורכב ממצולעים משוכללים, כאשר בכל קודקוד נפגשים מחומש ושני משושים. גוזרים את הכדורגל לאורך מקצועות כך שהוא נפרד לשני חלקים שונים בשטחם, והחתך עובר פעם אחת בכל קודקוד. כמה פאות יש בכל חלק?

6. על קליפה כדורית K בעלת רדיוס R נבחרה נקודה A. הכדור שמרכזו A ורדיוסו r מכיל חלק מהקליפה הכדורית K שיקרא כיפה כדורית. חשב את השטח של הכיפה באמצעות R ו- r.

7. מצא את כל הסדרות החשבוניות של מספרים שלמים חיוביים, $a_1,...,a_n$, $n \geq 3$, המקיימות: $\sum_{i=1}^{n-2} a_i a_{i+1} a_{i+2} = 5773$.

8. שניים משחקים משחק. בתחילתו, על שולחן המשחק יש 1002 אבנים, ולאחד השחקנים יש 143 אבנים ואת מינקובסקי המינק, בעוד לשני אין כלום. בכל תור, השחקן שאצלו נמצא מינקובסקי בוחר כמות כלשהי של אבנים על השולחן (לפחות 1, מותר לבחור את כולן). השחקן ללא מינקובסקי צריך לבחור בין שלוש אפשרויות – או שהוא לוקח את האבנים, או שהשחקן עם מינקובסקי לוקח אותן, או שהן נזרקות. כעת, אם לשחקן ללא מינקובסקי יש יותר אבנים מאשר לזה שעם מינקובסקי, מינקובסקי עובר צד. המשחק נמשך עד שאין יותר אבנים על השולחן; השחקן שיש לו יותר אבנים מנצח, ואם מספר האבנים שווה, מנצח השחקן עם מינקובסקי. איזה שחקן מנצח, וכיצד?

9. הוכיחו כי עבור כל שלושה מספרים חיוביים a,b,c מתקיים

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \le \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

10. עדו בונה סדרה של מספרים באופן הבא: a_1 הוא מספר טבעי האהוב עליו. בכל שלב הוא מטיל מטבע ומגדיר את a_{n+1} בתור $p(a_n)$ או $q(a_n)$ בהתאם לתוצאת המטבע, כאשר $p(x)=x^2+7x+5$, $q(x)=x^2+4x+80$. ידוע גם כי מבין ההטלות של המטבע כל אחת משתי התוצאות יצאה אינסוף פעמים. האם יכול להיות, שכל המספרים בסדרה ראשוניים?

11. נתונים שלושה ארבעונים קשיחים (מעץ) שכל מקצועותיהם באורך 1.
האם אפשר לשים את כולם בקופסה בצורת קובייה, שמקצועותיה באורך 1?

