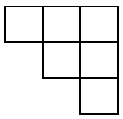
**17.06.2013 ט' בתמוז תשע"ג**

# קבוצת רותם , מחנה קיץ

1. במצולע חוסם ABCDEFG נתונים אורכים של 4 צלעות: BC = 15, CD = 17, DE = 18, EF = 16. הישר BF חותך את המעגל החסום בנקודות P, Q.
הוכח כי BP = FQ.

2. מצא את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורן לכל זוג מספרים ממשיים $x,y$ מתקיימת הזהות $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)\cdot f\left(y\right)-\sin\left(x\right)\cdot\sin\left(y\right)$.

3. מרדכי וצבי משחקים במשחק הבא. בתחילת המשחק יש לוח משבצות $m\times n$, כולו לבן, כאשר $n\le 9$. בשלב הראשון מרדכי משלם לצבי סכום של $s$ שקלים, וצבי חייב לצבוע בדיוק $s$ משבצות בכחול (צבי יכול לבחור בעצמו איזו משבצות הוא צובע). אחרי שצבי מסיים עבודות הצביעה, מרדכי יכול להחליף את סדר השורות של הטבלא וגם את סדר העמודות של הטבלא, לפי בחירתו. המטרה של מרדכי היא שבסופו של דבר בפינה הימנית העליונה תהיינה 6 משבצות בצבע כחול: המשבצת הפינתית, שתי משבצות הסמוכות לה, ו-3 משבצות הסמוכות לשתי המשבצות הללו (כמו בציור).
כמה מרדכי יצטרך לשלם לצבי, בהנחה ששניהם אינם ילדים מפגרים?
על מנת למנוע פיגור שכלי, נניח כי $m,n>2$. התשובה תלויה ב-$m,n$.



*בהצלחה!*

**18.06.2013 י' בתמוז תשע"ג**

# קבוצת רותם , מחנה קיץ

**1.** יהי $n \geq 1$ שלם. מהו המספר המרבי של זוגות זרים של איברים שונים בקבוצה $\{1,2,...,n\}$, כך שסכומי המספרים בזוגות שונים הם מספרים שלמים שונים בזוגות, שכולם קטנים או שווים ל- $n$?

**2.** מצא את כל המספרים השלמים $m \geq 2$ עבורם כל $n$ שלם בתחום $\frac{m}{3} \leq n \leq \frac{m}{2}$ מחלק את המקדם הבינומי $\binom{n}{m-2n}$.

**3.** במרובע קמור ABCD הצלעות BC, AD אינן מקבילות. נניח כי קיימת נקודה E על הצלע BC עבורה המרובעים ABED, AECD חוסמים. הוכח כי קיימת נקודה F על AD עבורה המרובעים ABCF, BCDF חוסמים אם ורק אם AB מקביל ל-CD.

*בהצלחה!*

**19.06.2013 י"א בתמוז תשע"ג**

# קבוצת רותם , מחנה קיץ

**1.** שני מרובעים $A_2B_2C_2D_2$ , $A_1B_1C_1D_1$ חסומים באותו המעגל. בנוסף נתון כי הישרים $A_1B_1, A_2B_2, C_1D_1, C_2D_2$ נפגשים כולם בנקודה $P$, והישרים $A_1D_1, A_2D_2, B_1C_1, B_2C_2$ נפגשים כולם בנקודה $Q$. הוכח כי אמצעי הקטעים $A_1C_1, A_2C_2, B_1D_1, B_2D_2$ נמצאים על מעגל אחד.

**2.** הוכח שברישום העשרוני של $\pi$ ניתן לסמן 10 קטעים באורך 100 שלא נוגעים זה בזה, שאם מתבוננים בקטעים אלה משמאל לימין מקבלים 10 מספרים שרשומים בסדר עולה. (מותר להסתמך ללא הוכחה על אי-רציונליות של $\pi$.)

**3.** נתון פולינום $p$ בעל התכונה הבאה: לכל $n$ שלם $p(n)$ הוא ריבוע שלם. הוכח כי קיים פולינום $q$ עבורו $p = q^2$.

*בהצלחה!*

**23.06.2013 ט''ו בתמוז תשע''ג**

# קבוצת רותם , מחנה קיץ

**1.** נתון גרף 3-רגולרי, בעל $N$ קודקודים ו-$K$ רכיבי קשירות. מצא את מספר תתי-הגרפים ה-2-רגולריים שלו באמצעות $K$ ו-$N$. (תת-גרף של גרף כלשהו מורכב מתת-קבוצה של קודקודים ותת-קבוצה של קשתות שקשורות רק לקודקודים הנתונים, אבל לא בהכרח לוקחים את כל הקשתות המקשרות את הקודקודים האלה. גרף $m$-רגולרי הוא גרף שבכל קודקוד שלו יש בדיוק $m$ קשתות).

**2.** מעגל $\alpha$ משיק מבפנים לשני מעגלים גדולים ממנו, $\beta$ ו-$\gamma$ בנקודות B ו-C, כאשר $\alpha$ יותר קטן משני המעגלים האחרים. הישרים $\ell_1,\ell_2$ הם משיקים משותפים של $\beta$ ו-$\gamma$. עבור $i=1,2$ נסמן ב-$B_i,C_i$ את נקודות ההשקה של $\ell_i$ עם המעגלים $\beta,\gamma$ בהתאמה, ונסמן ב-$X_i$ את נקודת מפגש של $BB_i$ עם $CC_i$. הוכח כי $X_1X_2$, ושני הישרים המשיקים למעגל $\alpha$ בנקודות B, C נפגשים בנקודה אחת או ששלושתם מקבילים.

**3.** הוכח כי לכל $s>0$ שלם מתקיימת הזהות:

$$4^s\cdot\binom{s+2}{2}=\sum_{\substack{a+b+c+d=s\\a,b,c,d\geq 0}}2^a\binom{b+3}{3}\cdot\binom{2s-1-a}{c}\cdot\binom{5}{d}.$$

*בהצלחה!*

**23.06.2013 ט''ו בתמוז תשע''ג**

# קבוצת ירדן , מחנה קיץ

אסור להשתמש במחשבון

**1.** חשב\י את הערך של

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{98}+\sqrt{99}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{3}}}+...+\frac{\sqrt{99}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{99}}}.$$

**2.** מצא\י את כל השלשות של מספרים שלמים $a,b,c$ עבורן $a^5-4=b^2+13bc+c^2$.

**3.** נתון גרף 3-רגולרי, בעל $N$ קודקודים ו-$K$ רכיבי קשירות. מצא את מספר תתי-הגרפים ה-2-רגולריים שלו באמצעות $K$ ו-$N$.
[הגדרות: תת-גרף של גרף כלשהו מורכב מתת-קבוצה של קודקודים ותת-קבוצה של קשתות שקשורות רק לקודקודים הנתונים, אבל לא בהכרח לוקחים את כל הקשתות המקשרות את הקודקודים האלה.
גרף $m$-רגולרי הוא גרף שבכל קודקוד שלו יש בדיוק $m$ קשתות.]

**4.** מעגל $\alpha$ משיק מבפנים לשני מעגלים גדולים ממנו, $\beta$ ו-$\gamma$ בנקודות B ו-C, כאשר $\alpha$ יותר קטן משני המעגלים האחרים. הישרים $\ell_1,\ell_2$ הם משיקים משותפים של $\beta$ ו-$\gamma$. עבור $i=1,2$ נסמן את נקודות ההשקה של $\ell_i$ עם המעגלים $\beta,\gamma$ הם $B_i,C_i$ בהתאמה, ו-$X_i$. את נקודת מפגש של $BB_i$ עם $CC_i$. הוכח כי $X_1X_2$, ושני הישרים המשיקים למעגל $\alpha$ בנקודות B, C נפגשים בנקודה אחת או ששלושתם מקבילים.

*בהצלחה!*

**24.06.2013 ט''ז בתמוז תשע''ג**

# תחרות קבוצתית , מחנה קיץ

אסור להשתמש במחשבון

**1.** הוכיחו כי לכל מספר שלם $n$, שלוש הספרות הימניות של $n^{100}$ מתלכדות עם שלוש הספרות הימניות של $n^{300}$.

**2.** נתונים 30 מספרים טבעיים, כולם שונים, כולם לפחות 1 ולא עולים על 100. הוכח כי ניתן לבחור מספרים שונים $a,b,c,d,e,f$ מבין המספרים הנתונים, המקיימים:
$a+b=c+d=e+f$.

**3.** מצאו את כל הפונקציות המוגדרות על קבוצת הממשיים החיוביים, המקיימות:
$2f\left(xy\right)=f\left(x^2/y\right)+f\left(y^2/x\right)$.

**4.** נתונים $a,b,c\geq 0$ המקיימים $a+b+c=1$. הוכיחו כי
$\sum_{cyc}\left(1-a^{3n+1}\right)^2\left(1-a^{3n}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1-a^{2n+3}\right)^2\left(1-a^{2n+2}\right)^2\left(1-a^{2n+1}\right)\geq 2$.

**5.** נתון מעוין ABCD, בו $\sphericalangle A=\sphericalangle C=60^\circ$. בפנים המעוין נמצאות הנקודות M, N, כאשר M יותר קרוב ל-A מאשר ל-C, ולעומת זאת N יותר קרובה ל-C מאשר ל-A. בנוסף נתון כי $\sphericalangle NBM=\sphericalangle NDM=60^\circ$. הוכיחו כי $AM\cdot CN\leq MN^2$.

**6.** $n>2$ חיילים עומדים בטור בסדר אקראי, חלקם עומדים דום וחלקם נוח. מגיע המפקד, ורוצה לסדר אותם לפי הגובה, כשכולם עומדים דום, באמצעות הפעולה הבאה: בכל פעם הוא בוחר שני חיילים, לאו דווקא סמוכים. הם מחליפים מקומות זה עם זה, וכל אחד מהם מחליף את צורת העמידה שלו (אם הוא עמד דום קודם, עכשיו הוא יעמוד נוח).
א. מה התנאי לכך שהמפקד יצליח?
ב. במקרה שבו הוא יכול להצליח, מה המספר המקסימלי של צעדים שהוא יזדקק להם?
הערה: מדובר בצבא של מדינה זרה, בה מיומנות קומבינטורית היא חלק מהכשרת היסוד של כל מפקד.

**7.** על פני קליפה כדורית נבחרו נקודות A, B, C (אף שתי נקודות לא נגדיות). נזכיר כי בגיאומטריה כדורית במקום קטעים ישרים לוקחים את הקשתות הקצרות של מעגלים גדולים, ושמרחק נמדד לפי קשתות אלו. נניח כי אמצעי הקשתות BC, AC, AB הם P, Q, R בהתאמה. לכל משולש כדורי שהצלעות (הקשתיות) שלו הן $a,b,c$ נגדיר $f$ של המשולש: $\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c$. הוכיחו כי $f\left(\mathrm{AQR}\right)=f\left(\mathrm{BPR}\right)=f\left(\mathrm{CPQ}\right)$.

**8.** נתונים מספרים ממשיים $x, y, z$ , המקיימים $xy + xz + yz + xyz = 4$ .
הוכיחו כי: $xyz\left(x + y + z + 2\right) \le x^2 y^2 z^2 + 4$ .

**9.** נתונות 2n נק' במישור, אף 3 לא על ישר אחד. מעבירים ישר שלא עובר באף אחת מהן. בכל אחד משני צדדיו, מציירים את קמור הנק' שבצד זה ומוחקים את כל הנק' הפנימיות. האם תמיד ניתן לבחור את הישר כך שמספר הנק' שנותרו בכל צד זהה?

**10.** הוכיחו כי לכל $k$ טבעי, מתקיימת לפחות אחת מבין שתי הטענות: או ש-$91 \mid 2^{4k} + 2^{8k} + 2^{12k}$ או ש-$91 \mid 2^{4k} + 2^{8k} - 2^{12k+1}$.

*בהצלחה!*

**26.06.2013 י''ח בתמוז תשע''ג**

# קבוצת רותם , מחנה קיץ

**1.** נקרא לקבוצה $A$ של מספרים שלמים **טובה** אם לכל $x, y \in A$, ולכל $k$ שלם, $x^2 + kxy + y^2 \in A$. מצא את כל הזוגות של מספרים שלמים $m, n \neq 0$ עבורם הקבוצה הטובה היחידה שמכילה את $m$ ואת $n$ היא קבוצת כל השלמים.

**2.** תהא $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ונסמן ב-$f^m$ את ההרכבה של $f$ עם עצמה $m$ פעמים. נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $f^{2k}(n) = n + k$, ונסמן ב-$k_n$ את ה-$k$ המינימלי שמקיים זאת. הוכח כי הסדרה $k_1, k_2, \ldots$ אינה חסומה.

**3.** במשולש ABC, נסמן ב-O את מרכז המעגל החוסם, וב-I את מרכז המעגל החסום. נקודות D, E, F נמצאות על הפאות BC, CA, AB בהתאמה, ונתון BD + BF = CA וכן CD + CE = AB. המעגלים החוסמים את המשולשים BFD, CDE נחתכים שנית בנקודה P ≠ D. הוכח כי OP = OI.

*בהצלחה!*

**י''ח בתמוז תשע''ג 26.06.2013**

# קבוצת ירדן , מחנה קיץ

**1.** א. מספר שלם נקרא **מוצלח** אם ניתן להציגו בתור $x^2-103y^2$, כאשר $x,\ y$ שלמים.
מצא את כל המספרים השלמים $n$, כך שגם $n$ וגם $-n$ מוצלחים.
ב. מספר שלם נקרא **מגניב** אם ניתן להציגו בתור $x^5+31y^5$, כאשר $x,\ y$ שלמים.
מצא את כל המספרים השלמים $n$, כך שגם $n$ וגם $2n$ מגניבים.

**2.** במשולש ABC, חוצה הזווית של A חותך את הצלע BC ב-K, ואת הקשת BC של המעגל החוסם ב-M. נסמן ב-N את הנקודה הסימטרית ל-M ביחס למרכז המעגל החוסם של משולש ABC. נסמן ב-O את מרכז המעגל החוסם של משולש BAK. הוכח/י כי נקודות B, N, O נמצאות על ישר אחד.

**3.** סדרת מספרים $\{t_i\}$ מוגדרת על ידי תנאי ההתחלה $t_0=t_1=t_2=1$ ונוסחת נסיגה $t_{n+3}=t_{n+2}+t_n$. הוכח/י כי $t_{2n}=t_n^2+2t_{n-1}t_{n-2}$ לכל $n\geq 2$.

*בהצלחה!*