תרגול באינווריאנטים

אינה אנטובה

תרגיל 1. על הלוח כתובים מספרים שלמים מ-1 עד $4N-1$. משחקים במשחק בא: בכל צעד ניתן להחליף כל שני מספרים אשר כתובים על הלוח בהפרשם (הגדול פחות הקטן). להוכיח כי אחרי $4N-2$ צעדים, המספר הנותר יהיה זוגי.

תרגיל 2. אלף מספרים שלמים (כלשהם) כתובים בשורה. בני כותב בשורה השנייה מתחת למספר A כמה פעמים A מופיע בשורה הראשונה. באותו אופן בני ממלא שורה שלישית (מתחת למספר A בשורה השנייה כמה פעמים A מופיע בשורה השנייה), רביעית וכו'. הוכיחו כי התהליך יתכנס, כלומר, החל משלב מסוים, כל שורה חדשה תהיה זהה לקודמת.

תרגיל 3. שלושה דוקטורנטים שיכורים חיים על מישור. הם מתהלכים על מישור אחד-אחד (אחד זז, שניים אחרים עומדים במקום), כאשר כל אחד זז על ישר אשר מקביל לישר שמחבר בין השניים האחרים. אם הם התחילו בנקודות: דוקטורנט א': (0,0), דוקטורנט ב': (3,0), דוקטורנט ג': (0,3),

א) האם ייתכן כי בשלב מסוים הם יעמדו בנקודות (1,2), (3,1), (5,4)? באותן נקודות אבל בסדר אחר?

ב) האם ייתכן כי בשלב מסוים הם יעמדו בנקודות: דוקטורנט א': (0,0), דוקטורנט ב': (0,3), דוקטורנט ג': (3,0)?

תרגיל 4. בחצר ריבועית $N \times N$ גדל דשא. בוקר אחד בדיוק $N-1$ מהריבועים מכוסים בדשא. בכל יום, כל ריבוע שיש לו שני שכנים המכוסים בדשא מתכסה בדשא גם הוא. האם ייתכן כי כל החצר תתכסה בדשא?

תרגיל 5. לרוניה יש חבילת קלפים עם מספרים מ-1 עד N אשר מסודרים בסדר אקראי. בכל שלב רוניה בודקת איזה מספר מופיע על הקלף העליון (נסמנו ב-K) והופכת את הסדר של K הקלפים הראשונים בחבילה.
דוגמא: אם הייתה לה חבילה 4,3,2,5,1, כאשר 4 הוא הקלף העליון, היא הופכת את הסדר של 4 הקלפים הראשונים בחבילה, ומקבלת 5,2,3,4,1.
הוכיחו כי בשלב מסוים הקלף העליון יהיה 1.

תרגיל בית באינווריאנטים

לשלוח את הפתרונות לאינה: inna.entova@gmail.com

תרגיל 1. מתתיהו מתחיל ממספר 7^{2013} כתוב על הלוח, ומבצע את הפעולה הבאה שוב ושוב: הוא מוחק את הספרה האחרונה של המספר שכתוב על הלוח ומוסיף אותה למספר שנשאר אחרי המחיקה. הוא נעצר כאשר במפר שהתקבל יש בדיוק עשר ספרות. הוכיחו כי במספר שהתקבל קיימות שתי ספרות זהות.

תרגיל 2. מעגל מחולק ל-6 חלקים. על החלקים כתובים מספרים 1,0,1,0,0,0 (נגד כיוון השעון). כבל שלב ניתן להוסיף 1 לשני מספרים שכתובים בשני חלקים שכנים. האם ייתכן כי בשלב מסוים כל המספרים הכתובים על המעגל יהיו זהים?

תרגיל 3. על לוח שחמט מונחות 64 מטבעות, אחת בכל משבצת, כך שעל המשבצות הלבנות המטבע הוא עם צד "עץ" למעלה, ועל המשבצות השחורות – הפוך. בכל שלב ניתן לבצע אחד משלושת הצעדים הבאים:

- להפוך את כל המטבעות בשורה אחת (כלשהי)
- להפוך את כל המטבעות בטור אחד (כלשהו)
- להפוך את כל המטבעות בריבוע 2×2 כלשהו

האם אפשר להגיע למצב בו בדיוק מטבע אחד הוא עם צד "עץ" למעלה, וכל השאר הם עם צד "פלי" למעלה?

תרגיל 4. למאיר נתון פולינום ריבועי $f(x)$. בכל שלב מרשים לו להחליף את הפולינום שיש לו באחד משני הפולינומים הבאים:

א. $f\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2$

ב. $f\left(\frac{1}{x-1}\right)(x-1)^2$

(שימו לב שהביטויים החדשים הם אכן פולינומים!)

ידוע כי הפולינום ההתחלתי של מאיר היה x^2-x-2. האם מאיר יכול לקבל, אחרי מספר צעדים, את הפולינום x^2-x-1?

פתרונות (קצרים) לתרגיל בית

תרגיל 1.

פתרון: האינווריאנט כאן הוא השארית של המספר על הלוח בחלוקה ב-3. אם המספר הכתוב על הלוח הוא $10A + B$, כאשר B היא ספרת האחדות, אז בשלב הבא מתתיהו מקבל את המספר $A + B$ כתוב על הלוח, וברור שלשני המספרים האלה אותה שארית בחלוקה ב-3.

בהתחלה על הלוח היה המספר 7^{2013}, ולו שארית 1 מחלוקה ב-3. אם מתתיהו קיבל מספר בן 10 ספרות, וכולן שונות, אז השארית מחלוקה ב-3 תהיה שווה לשארית של 9+8+7+6+5+4+3+2+1+0=45, כלומר, 0. לכן במספר בן 10 ספרות שמתקבל חייבות להיות שתי ספרות זהות.

תרגיל 2. תשובה: לא

פתרון: נסמן את המספרים שכתובים על המעגל ב-A, B, C, D, E, F (נגד כיוון השעון). נתבונן בערך

$|A + C + E - B - D - F|$ (שימו לב, ערך זה לא תלוי בסימון הנ"ל – חשוב רק שמספרים שכנים על המעגל יבואו עם סימנים שונים).

קל לראות שזהו אינווריאנט בתהליך שמתואר בבעיה.

בהתחלה ערך זה הוא 2. במקרה בו כל המספרים על המעגל שווים, ערך האינווריאנט הוא 0. לכן מצב זה לא יכול להתקבל.

תרגיל 3. תשובה: לא.

פתרון: האינווריאנט במקרה זה הוא שארית מודולו 4 של ההפרש בין מספר ה"עץ" ומספר ה"פלי" על הלוח בכל רגע.

קל לראות ששארית זו נשמרת ע"י כל אחת מהפעולות המותרות. בהתחלה השארית מודולו 4 של הפרש זה היא 0, ואילו היה מתקבל מצב בו בדיוק מטבע אחד הוא עם צד "עץ" למעלה, וכל השאר הם עם צד "פלי" למעלה, אז השארית מודולו 4 של הפרש זה הייתה שווה ל-2. לכן מצב זה לא יכול להתקבל.

תרגיל 4. תשובה: לא.

פתרון: האינווריאנט בבעיה זו הוא הדיסרקימיננט (זהו הביטוי $B^2 - 4AC$ עבור פולינום ריבועי $AX^2 + BX + C$).

קל לבדוק כי הפעולות שמותר לבצע נותנות פולינום ריבועי עם דיסקרימיננט שווה לזה של הפולינום המקורי (יש לכתוב את הפולינומים שמתקבלים אחרי כל אחת משתי הפעולות במפורש עבור פולינום ריבועי $AX^2 + BX + C$, ולבדוק). כמו כן, קל לראות כי ל-$(x^2 - x - 2)$ ול-$(x^2 - x - 1)$ יש דיסקרימיננטים שונים. לכן מאיר לא יוכל לקבל אחד מהשני.