תרגיל באי-שוויונים

(מיכאל רוזנברג, 29.11.2012)

1. לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$, הוכיחו כי $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$.

2. עבור $a,b,c>0$, הוכיחו כי $\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}\geq\frac{3\left(a^4+b^4+c^4\right)}{ab+bc+ca}$.

3. עבור $a,b,c>0$, הוכיחו כי $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{3\left(a^4+b^4+c^4\right)}{a^2b+b^2c+c^2a}$.

4. עבור כאלה ש-$a+b+c\geq 1$, הוכיחו כי $\frac{a^2+a}{a+bc}+\frac{b^2+b}{b+ac}+\frac{c^2+c}{c+ab}\geq 3$.

5. a,b,c צלעות של משולש, r רדיוס המעגל החסום, R רדיוס המעגל החוסם.

הוכיחו כי $\left(3-\frac{R}{r}\right)\left(a+b+c\right)\leq\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}\leq a+b+c$.

6. עבור $a,b,c\geq 0$, הוכיחו כי $\sum_{cyc}\sqrt{ab\left(a+b\right)^3}\geq\left(a+b+c\right)\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)}$.

7. עבור $x_1,x_2,...,x_n\geq 0$, הוכיחו כי $\prod_{i=1}^{n}\left(1+x_1+x_2+...+x_i\right)\geq\sqrt{\left(n+1\right)^{n+1}x_1x_2\cdot...\cdot x_n}$.