The Hook Formula נוסחת הווים

ניסוח:

לכל טבלת יאנג λ עם n משבצות, מספר דיאגרמות היאנג הוא $\frac{n!}{\prod_{x\in\lambda} hook(x)}$ *.

שלבי ההוכחה:

א. נוכיח שהמקדם של המונום $x_1^{c_1}x_2^{c_2}\dots x_m^{c_m}$ בפולינום

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n\prod_{1\le i<j\le m}(x_i-x_j)$$

הוא $\frac{n!}{c_1!c_2!\dots c_n!}\prod_{1\le i<j\le m}(c_i-c_j)$.

ב. ננסח מחדש את הנוסחא כך: לכל טבלת יאנג $\lambda=\{a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_m\ge 0\}$ עם n משבצות, מספר דיאגרמות היאנג הוא $\frac{n!}{(a_1+m-1)!(a_2+m-2)!\dots a_m!}\prod_{1\le i<j\le m}(a_i-a_j-i+j)$.

ג. נוכיח את הנוסחא בסעיף ב.

הוכחה:

א. נחשב את המקדם של המונום $x_1^{c_1}x_2^{c_2}\dots x_m^{c_m}$ בפולינום

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n\prod_{1\le i<j\le m}(x_i-x_j).$$

מה הוא הפולינום $P=\prod_{1\le i<j\le m}(x_i-x_j)$? זהו פולינום אנטי-סימטרי, כלומר לכל $i\ne j$, אם נחליף בין x_i ו-x_j, סימן הפולינום יתהפך.

לכן הגורם $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_m^{\sigma_m}$ אינו מופיע כאשר שניים מה-σ_i שווים. נשים לב שדרגת הפולינום היא $\binom{m}{2}$, ולכן בהכרח $\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m\}=\{0,1,\dots,m-1\}$, לכן σ_i+1 היא תמורה. קל לראות שהמקדם של $x_1^{m-1}x_2^{m-2}\dots x_m^0$ הוא 1, ולכן $P=(-1)^m\sum_{\sigma\in S_n} sgn\,\sigma\prod_{i=1}^m x_i^{\sigma(i)-1}$.

לכן המקדם של המונום $x_1^{c_1}x_2^{c_2}\dots x_m^{c_m}$ בפולינום $P(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ הוא

$$(-1)^m\sum_{\sigma\in S_n} sgn\,\sigma\left(\text{מקדם ה בפולינום } (x_1+x_2+\cdots+x_m)^n\prod_{i=1}^m x_i^{c_i-\sigma(i)+1}\right)$$

$$=(-1)^m\sum_{\sigma\in S_n} sgn\,\sigma\left(\frac{n!}{\prod_{i=1}^n(c_i-\sigma(i)+1)!}\right)$$

$$=\frac{(-1)^m n!}{c_1!\,c_2!\dots c_m!}\sum_{\sigma\in S_n} sgn\,\sigma\left(\prod_{i=1}^m c_i(c_i-1)\dots(c_i-\sigma(i)+2)\right)$$

וכעת, גם הפולינום הזה הוא אנטי-סימטרי מדרגה $\binom{m}{2}$ במשתנים $c_1,c_2,\dots,c_m$, ולכן מובטח לנו שכל המונומים מדרגה קטנה מ-$\binom{m}{2}$ יצתמצמו, ולכן, כמו שראינו על פולינום P, הוא שווה ל-

$$\frac{(-1)^m n!}{c_1!\,c_2!\dots c_m!}\sum_{\sigma\in S_n} sgn\,\sigma\left(\prod_{i=1}^m c_i^{\sigma(i)-1}\right)=\frac{n!}{c_1!\,c_2!\dots c_m!}\prod_{1\le i<j\le m}(c_i-c_j)$$

וסיימנו את הוכחת חלק א.

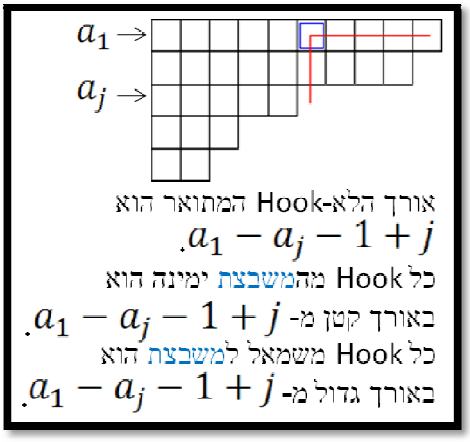
ב. תהי $\lambda=\{a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_m\ge 0\}$ טבלת יאנג עם n משבצות.

מה הנוסחא $\frac{n!}{\prod_{x\in\lambda} hook(x)}$ אומרת? את $n!$ אנחנו מבינים.

$\prod_{x\in\lambda} hook(x)$ לעומת זאת, הוא ביטוי יותר מסובך.

נרשום אותו אחרת.

מכפלת ה-$hook(x)$ עבור x בשורה הראשונה הוא מכפלות של מספרים שונים, שהגדול מביניהם הוא a_1+m-1 והשאר קטנים יותר ושונים זה מזה. כלומר, כולם נמצאים במכפלה $(a_1+m-1)!$. אילו מספרים לא נמצאים? סך הכל צריך



*המושגים מוגדרים בויקיפדיה

להכפיל a_1 מספרים, כלומר במכפלה $(a_1+m-1)!$ יש $m-1$ גורמים יותר מדי. קל לראות גם שהמספרים $a_1-a_j+m-1-(m-j)=a_1-a_j-1+j$ אינם מהווים $hook(x)$ עבור x בשורה הראשונה, ראה שרטוט. לכן, מכפלת ה-$hook(x)$ עבור x בשורה הראשונה היא $(a_1+m-1)!/\prod_{1<j\le n}(a_1-a_j-1+j)$. באופן דומה, מכפלת ה-$hook(x)$ עבור x בשורה ה-i היא $(a_i+m-i)!/\prod_{i<j\le n}(a_i-a_j-i+j)$. לכן מכפלת ה-$hook(x)$ עבור כל ה-x-ים היא

$$(a_1+m-1)!\,(a_2+m-2)!\,\dots a_m!/\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j-i+j)$$

לכן הביטוי בנוסחת הווים הוא

$$\frac{n!}{\prod_{x\in\lambda}hook(x)}=\frac{n!}{(a_1+m-1)!\,(a_2+m-2)!\,\dots a_m!}\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j-i+j).$$

ג. נציב $a_i+m-i=c_i$, ונקבל ש- $c_1>c_2>\cdots>c_m\ge 0$. נשים לב שהתאמה זו היא חח"ע ועל בין טבלאות יאנג מגודל n למספרים $c_1>c_2>\cdots>c_m\ge 0$ עבורם $\sum_{i=1}^n c_i=\binom{m}{2}+n$.
בנוסף, מסעיף ב' מתקיים ש-$\frac{n!}{\prod_{x\in\lambda}hook(x)}=\frac{n!}{c_1!c_2!\dots c_n!}\prod_{1\le i<j\le m}(c_i-c_j)$. הביטוי מצד ימין הוא המקדם של המונום $x_1^{c_1}x_2^{c_2}\dots x_m^{c_m}$ בפולינום $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n\prod_{1\le i<j\le m}(x_i-x_j)$.
כעת ברשותנו הכלים להוכחה.
נוכיח באינדוקציה את הנוסחא עבור טבלאות יאנג עם לכל היותר m שורות. האינדוקציה תהיה על גודל הטבלה n.
עבור $n=0$ הטענה ברורה, יש רק הדיאגרמה הריקה.
מה מייצג כל מקדם של המונום $x_1^{c_1}x_2^{c_2}\dots x_m^{c_m}$ (עבור c_i כלליים) בפולינום

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n\prod_{1\le i<j\le m}(x_i-x_j)\ ?$$

i) אם $c_1>c_2>\cdots>c_m$, מסעיף א' נובע שהמקדם של המונום $x_1^{c_1}x_2^{c_2}\dots x_m^{c_m}$ הוא מספר דיאגרמות היאנג בטבלת היאנג $\lambda=\{a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_m\ge 0\}$ שמתאימה ל-$c_1>c_2>\cdots>c_m$.
ועכשיו עבור $\{c_i\}_{i=1}^m$ כלליים,
ii) אם $c_i=c_j$ כאשר $i\ne j$ אז המקדם מתאפס.
iii) אחרת קיימת תמורה יחידה σ כך ש $c_{\sigma(1)}>c_{\sigma(2)}>\cdots>c_{\sigma(m)}$, ומטעמי אנטי-סימטריות, המקדם של המונום $x_1^{c_1}x_2^{c_2}\dots x_m^{c_m}$ הוא מספר דיאגרמות היאנג בטבלת היאנג $\lambda=\{a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_m\ge 0\}$ שמתאימה ל-$c_{\sigma(1)}>c_{\sigma(2)}>\cdots>c_{\sigma(m)}$ כפול סימן התמורה σ.

נניח את טענות אלו עבור גודל טבלת יאנג n ונוכיח אותן עבור גודל טבלת יאנג בגודל $n+1$, ובכך נוכיח את צעד האינדוקציה.
בעצם, מספיק להוכיח את i), וטענות ii) ו-iii) ינבעו מאנטי סימטריה של הפולינום.
נסמן $P_n=(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n\prod_{1\le i<j\le m}(x_i-x_j)$.
לכל פולינום P נגדיר את $Down(P)$ להיות סכום המונומים של P מהצורה $ax_1^{c_1}x_2^{c_2}\dots x_m^{c_m}$ שעבורם $c_1>c_2>\cdots>c_m$.
נתבונן בפולינום $Down(P_n)$. לפי i) והנחת האינדוקציה, פולינום זה שווה ל-

$$\sum_{\substack{\mu\text{ דיאגרמת יאנג}\\ c_1>c_2>\cdots>c_m\text{ מתאימים}}} x_1^{c_1}x_2^{c_2}\dots x_m^{c_m}$$

במילים אחרות, הפולינום $(x_1+x_2+\cdots+x_m)Down(P_n)$ הוא סכום העובר על דיאגרמות יאנג של $x_1^{c_1}x_2^{c_2}\dots x_m^{c_m}$, ובוחרים לאיזה אחד מה-$x_i$ צריך להגדיל את החזקה ב-1.
דרך זו דומה לדרך שבה ניתן להציג דיאגרמת יאנג מגודל $n+1$: בוחרים דיאגרמת יאנג מגודל n, ומחליטים איפה באיזו אחת מ-m השורות יש לשים את המשבצת ה-$n+1$. מכאן שצריך להגדיל את החזקה של ה-x_i המתאים באחד כמו בצורה שהצגתי. אז i) יתקיים עבור $n+1$.
עכשיו יבוא מתחכם ויגיד - מה קורה אם החלטת לשים את המשבצת ה-$n+1$ במקום אסור, נניח בסוף השורה ה-i כאשר $a_i=a_{i-1}$. במקרה זה אני אתחכם ואגיד שהבעיה שהצבענו עליה מתייחסת רק למונומים שבהם $c_i=c_{i-1}$ בפולינום $P_n(x_1+x_2+\cdots+x_m)$. והם אינם מעניינים אותנו כי אנחנו כבר יודעים שהם מתאפסים.
ולכן i) באמת מתקיים עבור $n+1$. מ.ש.ל.