שיטת הרמונים

משפט. בונקציה ההרמונית מתקבלת על שיטת הקצה.

אופרטורים הפעלה X_i. בלשונו עוקן.

$$0 = f(z - X_n^{-1} + X_n + \dots + X_2^{-1} + X_2 + X_1^{-1} + X_1)$$

(נשתמש לפרנקציה ההרמונית).

אינדוקציה על n:

$n=1$ ברור.

להוכיח ההינדוקציה מספיק לבדוק

$$f(X_n^{-1} + X_n + \dots + X_2^{-1} + X_2) \geq f(1-n)2 \quad (1)$$

אם מכניסה אחד פה, נשנית גם ערכו ובמקום 1, נקבל גם ערבור סכום סומדי של אי-שוויונים מסוג כזה, נקבל מקבלים סכום אי-שוויונים שהם כולם שוויון, נקבל כל מחוגה היחס שוויון, נקבל f היא הרמונית על $x_1 = \text{const}$, כלומר f לכן גלויה ב- x_1 בהמשך סומדי. f קבוע.

ובכן, כל אחד אי-שוויון (1).

נקח: $m(x_2,\dots,x_n) = (2n-2) - x_2 - x_2^{-1} - \dots - x_n - x_n^{-1}$

$$M = m(X_2, \dots, X_n)$$

כל: $Mf \geq 0$.

ערבי f ערבור x_1 שהן. גלויים כך $Mf(x_1,\dots,x_n)$

סכום הסדרה בקוורדינאטה הראשונה
$f(X_1^{-1}+X_1)$ מתבטאה בהסדרה f בקואורדינאטה
הראשונה, כלומר x_1 ערכי f עבור x שווה.

אבל איך?

בעזרת פולינומים:

$$\boxed{\begin{aligned} &P_0(t)=2, \quad P_1(t)=2+t, \\ &P_{k+2}(t)=(2+t)P_{k+1}(t)-P_k(t) \end{aligned}}$$

למה 1. $P_k f=f(X_1^k+X_1^{-k})$ עבור כל k,
כאשר $P_k=P_k(M)$. כמסקנה, $P_k f\geq 0$.

למה 2. $P_k(2\cos\alpha-2)=2\cos(k\alpha)$

הערה. כאשר T_k הוא פולינום צ'בישב.
כמסקנה, $P_k(t)=2T_k\left(\frac{t}{2}+1\right)$,

למה 3. $P_k(t)=2+(t-t_1)\cdot\ldots\cdot(t-t_k)$, כאשר
$t_j=2\cos\frac{2\pi j}{k}-2$
כמסקנה, $P_k(t)\geq 2$ עבור $t\geq 0$.

הוכחת למה 1. אינדוקציה על k. קל עבור $k=0,1$.

$$f(X_1^k+X_1^{-k})=f\left((X_1^{k-1}+X_1^{-k+1})(X_1+X_1^{-1})-(X_1^{k-2}+X_1^{-k+2})\right)=$$
$$=f(P_{k-1}(2+M)-P_{k-2})$$
מש"ל.

מסקנה פונקציה הרמונית כזו"ג כ-x_1
בגלגל שחצוי ע"י ערכיה באיזור $x_1=0$
בגלגל יחיד.

תרגיל בית 2. טענה 2. נוכיח באינדוקציה על k עבור $k=0,1$.

פתרון

$$p_{k+2}(2\cos\alpha-2) = 2\cos\alpha\cdot p_{k+1}(2\cos\alpha-2) - p_k(2\cos\alpha-2) =$$

$$= 2\left(2\cos\alpha\cos((k+1)\alpha) - \cos(k\alpha)\right) =$$

$$= 2\left(\cos((k+2)\alpha) - \cos(k\alpha) + \cos(k\alpha)\right) = 2\cos((k+2)\alpha)$$

פתרון טענה 3. קל להראות, שהפולינום מתוקן.
קל להראות, כי t_j הם שורשי $p_k(t)-2$.
אבל, הדרכה מבין t_j מובדלים בדיוק ב-π.
לכן הטענה קיבל ברורה.

שים לב שאם $t_r=t_j=\theta$, אז $r+j=k$, $\theta\in(0,4]$

אבל במידה $t\in[-4,0]$

$$|p(t)| = |2\cos(\ldots)| \le 2$$

לכן כדי שהקסימום מתקבל, לכן t_j הוא שורש מכפלה של $p_k(t)-2$. מכאן כל השורשים שלו.

נסמן H^+ מחצי הסריגים הרמוניים אי-שלילי.

נגדיר: r מספר אי-שלילי מינימלי, עבורו קיים $g(r+M)$ כך ש $g\in H^+$.
(ברור שכזה מתקיים ל-r). ג"ל $r=0$.

קל להראות כי r קיים ולכן עולה על 2, הרי
$0\le g(X_1^{-1}+X_1) = g(2+M)$.

נניח בשלילה כי $r>0$

מתלקה עם איבריו: $p_k(t)$ ב- $(t-2(n-1))(t+r)$

$$p_k(t) = (t-2(n-1))(t+r)\,q_k(t) + r_k(t) \qquad (2)$$

ונגדיר עם

$$Q_k = q_k(M)\ ,\ R_k = r_k(M)$$

<u>למה 5</u> $R_k(g) \geq 0$ לכל $g \in H^+$.

נסמן ע"י M את ההכלה הקומפקטית של M.

$$0 < r \leq 2$$

נקח $[0,\pi] \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{2-r}{2}\right)$

נבחר k כך ש- $k\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ערבורן אינ':

$$p_k(-r) = 2\cos(k\varphi) < 0 \qquad (\text{למה } 2)$$

$$p_k(2n-2) \geq 2 \qquad (\text{למה } 3)$$

לכן ב- (2)

$$r_k(2n-2) = p_k(2n-2)$$

$$r_k(-r) = p_k(-r)$$

$r(x)$ בונקציה לינארית, לכן ניתן לפרבול ישר עבור 2 נקודות שבחרנו.

$$r_k(t) = p_k(2(n-1)) + (t-2(n-1))\frac{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)}{r + 2(n-1)}$$

$$r_k(t) = \alpha t + \beta$$

לכן

$$0 \underset{\text{למה } 5}{\leq} R_k(g) = (\alpha M + \beta)\,g$$

<u>למה 6</u> $\alpha > 0$ וגם $\beta/\alpha < r$.

טוען ההכחה: $g(\beta/\alpha) + gM \leq 0$ לכל $g \in H^+$, כלומר לכל r שלם.

M הוא g כזה שמגדיר למגדל 5, 6-

$$\alpha = \frac{p_k(2n-2) - p_k(-r)}{2(n-1)+r} > 0$$

$$\beta = p_k(2n-2) - \frac{2(n-1)}{2(n-1)+r}\left(p_k(2n-2) - p_k(-r)\right)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{r \cdot p_k(2n-2) + (2n-2)p_k(-r)}{p_k(2n-2) - p_k(r)} < \frac{r\, p_k(2n-2)}{p_k(2n-2)} = r$$

הוכחת למה 3

נניח כי:
$p_k(2n-2) > 0$
$p_k(-r) < 0$

$$p_k(t) = (t - 2(n-1))(t+r)\, q_k(t) + r_k(t)$$

למה 4 ניתן להציג q_k כצירוף לינארי חיובי של $p_0, \dots, p_{k-2}$:

$$q_k(t) = \sum_{l=0}^{k-2} A_l p_l(t)$$

כאשר $A_l \geq 0$.

הוכחת למה 5 (עם סימן למה 4)

$$R_k g = P_k g + (M+r)(2n-2-M) Q_k g =$$

$$= P_k g + (M+r)(X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1}) Q_k g$$

$g \geq 0$ לפי למה 1.

מכאן $Q_k g \geq 0$ לפי למה 4.

הפעלה של $(X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1})$ שולחת פונקציה חיובית חזרה לחיובית.
$r+M$ חיובי עם אי-שלילי ולכן חיובי. של פונקציה חיובית הרמונית. ובכן, הכל אי-שלילי.

הוכחת למה 4 נסכים $p_k\left(\frac{z+z^{-1}-2}{t}\right) = z^k + z^{-k}$

$$z = e^{i\alpha}$$

$$t = z + z^{-1} - 2, \quad p_k(t) = z^k + z^{-k}$$

נסמן Q_k כצירוף של $p_0, \dots, p_{k-2}$:

$$Q_k(z+z^{-1}-2) = \frac{z^k + z^{-k} - r_k(z+z^{-1}+2)}{(z+z^{-1}-2+r)(z+z^{-1}+2)}$$

$$= A_{k-2}(z^{k-2} + z^{2-k}) + A_{k-3}(z^{k-3} + z^{3-k}) + \dots + A_1(z+z^{-1}) + A_0$$

(הערה: ניתן לעשות זאת גם עבור $z \to z^{-1}$)

$\exists$ $A_\ell \geq 0$.

כאשר $z \to \infty$

$$\frac{z^k}{(z+z^{-1}-2n)(z+z^{-1}+r-2)} + o(1) = \varphi_k(z+z^{-1}-2) = A_{k-2}z^{k-2} + \dots + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 + o(1) \quad (*)$$

כך φ_k כפולינום ב-r כך

$(x \to 0)$ $x = \frac{1}{z}$ נקבל x^{k-2} .

$$\frac{1}{(1-2nx+x^2)(1+(r-2)x+x^2)} = A_{k-2} + A_{k-3}x + \dots + A_1 x^{k-3} + A_0 x^{k-2} + o(x^{k-2})$$

ובכן, A_ℓ הם מקדמי טור חזקות של הפונקציה הבאה.
מה ניתן לומר על A_ℓ?

$$\frac{1}{(x^2-2x+1)(x^2+(r-2)x+1)} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x^2-2nx+1} = u(x)\cdot V(x)$$

נסמן u ו-V כפונקציות הבאות.

נקח $\nu_1 > 1 > \nu_2$ כשורשי $x^2-2nx+1$.

$$V(x) = \frac{1-2x+x^2}{1-2nx+x^2} = 1 + \frac{(2n-2)x}{(1-\nu_1 x)(1-\nu_2 x)} =$$

$$= 1 + \frac{(2n-2)x}{\nu_1 - \nu_2} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(\nu_1^{k+1} - \nu_2^{k+1}\right)$$

נקח u. נמקרים בהתאם לערכי $r>0$ ו-$r=0$.

$$x\,u(x) = \frac{x}{(1-2x+x^2)(1+(r-2)x+x^2)} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{1-2x+x^2} - \frac{1}{1+(r-2)x+x^2}\right)$$

ξ, ξ^{-1} שורשי $1+(r-2)x+x^2$

$$(\dots) = \sum (k+1)x^k - \frac{1}{\xi-\xi^{-1}} \sum \left(\xi^{k+1} - \xi^{-k-1}\right) x^k$$

$$k+1 \geq \left|\xi^k + \xi^{k-2} + \dots + \xi^{-k}\right|$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.