תרגיל בזיווגים

זיווג בגרף הוא תת-גרף 1-רגולרי (כלומר קבוצת קשתות זרות). **זיווג מקסימאלי** הוא זיווג בגודל מקסימאלי. **זיווג מושלם** הוא זיווג המערב את כל הקודקודים. **זיווג מכסה** קבוצת קודקודים A אם הוא מערב את כל קודקודי A (ואולי גם קודקודים נוספים).

מסלול מתחלף על פני זיווג מסוים Z הוא מסלול שהקשתות שלו שייכות\לא שייכות ל-Z לחילופין. **מסלול משפר** זיווג מסוים Z הוא מסלול מתחלף על פני Z שמתחיל ונגמר בנקודות שונות שלא מעורבות ב-Z.

0. נתון גרף וזיווג בו. הוכח: אין מסלול משפר לזיווג ⇔ הזיווג הוא מקסימאלי.

1. משפט Hall: נתון גרף דו-צדדי $G(A,B)$, כאשר A,B הם הצדדים שלו. הוכח כי קיים זיווג המכסה את A אם ורק אם לכל $U \subseteq A$ מתקיים $|N(U)| \geq |U|$, כאשר $N(U)$ זו קבוצת השכנים של U.

2. משפט Tutte: נתון גרף G. הוכח כי קיים זיווג מושלם אם ורק אם לכל $U \subseteq V(G)$ כמות רכיבי הקשירות של $G-U$ בגודל אי-זוגי אינה עולה על $|U|$.

3. מטריצה דו-סטוכסטית היא מטריצה עם מרכיבים אי-שליליים, עבורה סכום המספרים בכל שורה ובכל עמודה שווה 1. הוכח כי היא בהכרחה צירוף קמור של מטריצות תמורה.

4. תהי X קבוצה סופית, X_k משפחת כל תתי הקבוצות שלה בגודל k. הוכח כי לכל k,m קיים זיווג בין X_k ל-X_m שהוא מכסה את אחת המשפחות, כך שבכל זוג קבוצה אחת מכילה קבוצה אחרת.

5. בטבלא N עמודות ו- M שורות ($M < N$). חלק מהמשבצות מסומנות בכוכביות, כך שבכל עמודה יש כוכבית אחת לפחות. הוכח, שיש כוכבית כזאת, שבשורה שלה יש יותר כוכביות מאשר בעמודה שלה.

6. טבלא ריבועית מלאה באחדות ואפסים, כך שבכל קבוצת צריחים מקסימאלית הלא מאימים זה על זה מופיע אחד. הוכח כי קיימים מספרים שלמים i, j עבורם $i + j \geq n+1$ וקיימים i שורות ו-j עמודות, כך שכל החיתוכים של i השורות עם j העמודות הם אחדים.

7. כיסוי קודקודים של גרף הוא קבוצת קודקודים כך שלכל קשת של הגרף לפחות אחד הקצוות שלה נמצא בכיסוי. בגרף דו-צדדי גודל הזיווג המקסימאלי שווה לגודל כיסוי קודקודים המינימאלי.

8. נתון גרף דו-צדדי, כל צד שלו בגודל $2n$. בהנחה שתנאי Hall מתקיים לכל קבוצה עד גודל n כולל, אך משני הצדדים, הוכח שיש זיווג מושלם.

9. בכל משבצת של מטריצה ריבועית רשום אחד מבין המספרים $1,-1,0$; כך שבכל שורה ובכל עמודה גם 1 וגם 1- מופיע פעם אחת בדיוק. הוכח שעל ידי תמורת שורות ותמורת עמודות אפשר להפוך סימן לכל המשבצות בו-זמנית.

10. יש גרף G עם $2n$ קודקודים. שניים משחקים במשחק הבא. בכל תור בוחרים שכן לא צבוע של מי שנבחר בתור הקודם, וצבעים אותו. בתחילת המשחק אף קודקוד אינו צבוע. במהלך הראשון השחקן הראשון בוחר קודקוד כלשהו. הוכח שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת, אם ורק אם יש זיווג מושלם ב-G.

11. במחנה אימונים של אולימפיאדת פיסיקה במדינה זרה משתתפים 42 תלמידים. כל אחד מהם ברוגז עם חצי עולם (כלומר עם 21 תלמידים בדיוק, רוגז הוא יחס הדדי). הוכח כי אפשר לשלוח את התלמידים לעשות מעבדה בזוגות, או שאפשר לשלוח אותם לפעילות חברתית בשתי קבוצות (כך שאף שני תלמידים באותה קבוצה או באותה קבוצה לא יריבו).

12. נתון גרף $2k$-רגולרי. הוכח שיש בו תת-גרף על כל הקודקודים שהוא איחוד זר של מעגלים.

13. בטבלא M שורות, N עמודות. "מהלך אופקי" זו תמורה של איברי הטבלא שבה כל איבר נשאר באותה שורה בה הוא כבר היה. באופן דומה מגדירים "מהלך אנכי".
מצא את K הקטן ביותר, כך שאפשר לבצע כל תמורה של איברי הטלא ב-K מהלכים.

14. An alien race has three genders: male, female, and emale. A married triple consists of three persons, one from each gender, who all like each other. Any person is allowed to belong to at most one married triple. A special feature of this race is that feelings are always mutual — if x likes y, then y likes x.
The race is sending an expedition to colonize a planet. The expedition has n males, n females, and n emales. It is known that every expedition member likes at least k persons of each of the two other genders. The problem is to create as many married triples as possible to produce healthy offspring so the colony could grow and prosper.
a) Show that if n is even and $k = \frac{n}{2}$, then it might be impossible to create even one married triple.
b) Show that if $k \geq \frac{3}{4}n$, then it is always possible to create n disjoint married triples, thus marrying all of the expedition members.

15. בקבוצה סדורה חלקית גודל האנטי-שרשרת המקסימאלית שווה לגודל כיסוי שרשראות המינימאלי.

רמזים ושאלות חימום

I. שאלה מפגרת: N קבוצות, על N איברים. כל איחוד של K קבוצות מכיל לפחות K איברים. יש תמורה שמתאימה לכל קבוצה איבר שבה.

II. רגולרי דו-צדדי. לצד עם דרגה גבוהה יותר (הקטן יותר) יש זיווג מכסה.

III. בטבלא בעלת n שורות, ו-m עמודות רשומים מספרים אי-שליליים. הוכח כי:
א. אם לכל משבצת בה רשום מספר חיובי, סכום המספרים בשורה שלה שווה לסכום המספרים בעמודה שלה, אז הוכח כי $m = n$.
ב. לכל משבצת בה רשום מספר חיובי, סכום המספרים בשורה שלה גדול או שווה לסכום המספרים בעמודה שלה. הוכח כי $m \geq n$.

IV. קבוצה בגודל 400 מחולקת ב-2 דרכים לאיחוד זר של 20 קבוצות שגודלם 20 איברים: $\{A_i\}_{i=1}^{20}$ ו- $\{B_i\}_{i=1}^{20}$. הוכח כי קיימת תמורה של $\{B_i\}_{i=1}^{20}$ כך שלכל i מתקיים $A_i \bigcap B_i \neq \varnothing$.

V. G הוא גרף דו-צדדי, ו-0 הוא לא ע"ע של מטריצת השכנויות שלו. הוכח כי קיים זיווג מושלם ב-G.