משוואות פונקציונאליות \ תורת המספרים

בדף זה נשתמש בסימונים הבאים: $\mathbb{N}$ = קבוצת מספרים שלמים חיוביים,
$\mathbb{N}_0$ = קבוצת מספרים שלמים אי-שליליים.

1. (ISL 2004/N2) פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מקיימת $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\gcd(k,n)$ לכל n טבעי.

א) הוכח כי לכל m, n טבעיים זרים, $f(mn)=f(m)f(n)$.

ב) הוכח כי לכל a טבעי, קיים פתרון למשוואה: $f(x)=ax$.

ג) מצא את כל ה-a-ים הטבעיים שעבורם הפתרון למשוואה הנ"ל הינו יחיד.

2. (ISL 2004/N3) מצא את כל הפונקציות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שמקיימות לכל m, n טבעיים:

$$(f^2(m)+f(n))\mid(m^2+n)^2.$$

3. (ISL 2000/A4) פונקציה $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ מקיימת לכל n שלם אי-שלילי:

$$f(4n)=f(2n)+f(n)$$
$$f(4n+2)=f(4n)+1$$
$$f(2n+1)=f(2n)+1$$

הוכח שלכל $m\in\mathbb{N}$, יש בדיוק $f\left(2^{m+1}\right)$ שלמים n בקטע $\left[0,2^m-1\right]$ עבורם $f(4n)=f(3n)$.

4. (IMO 1996/6) מצא את כל הפונקציות $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ שמקיימות לכל $m,n\in\mathbb{N}_0$:

$$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n).$$

5. (ISL 2007/N5) מצא את כל הפונקציות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהן על, ובנוסף, לכל m, n טבעיים ולכל ראשוני p, מתקיים: $p\mid f(m+n)\Leftrightarrow p\mid(f(m)+f(n))$.