תרגול משוואות פונקציונליות

1. מצא את כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות: לכל $x,y\in\mathbb{R}$
$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$.
2. מצא את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות: לכל $x,y\in\mathbb{R}$
$f(x+y)-f(x-y)=4xy$.
3. מצא את כל הפונקציות החח"ע $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות: לכל $x,y\in\mathbb{R}$
$f(f(x)+y)=f(x+y)+1$.
4. מצא את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות: לכל $x\in\mathbb{R}$
   א. $f(-x)=-f(x)$
   ב. $f(x+1)=f(x)+1$
   ג. $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}f(x)$, $(x\neq 0)$.
5. פונקציה $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ המקיימת: לכל $x,y\in\mathbb{N}_0$
   א. $f(0,y)=y+1$
   ב. $f(x+1,0)=f(x,1)$
   ג. $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$
   מצא את $f(4,1981)$.
6. מצא את כל הפולינומים $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ בעלי מקדמים ממשיים כך שלכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ המקיימים $ab+bc+ac=0$ יתקיים השיוויון:
$f(a-b)+f(b-c)+f(c-a)=2f(a+b+c)$.
7. נגדיר את $rad(n)=1$ אם $n=0,1$ ואחרת $rad(n)=p_1p_2\dots p_k$ כאשר המחלקים הראשוניים של n הם $p_1,p_2\dots p_k$ מצא את כל הפולינומים $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש:
$rad\big(f(n)\big)|rad\left(f\left(n^{rad(n)}\right)\right)$.