# פתרונות גיאומטריים בעזרת קואורדינטות בריצנטריות – גיליון הגדרות ותכונות בסיסיות

נניח, כי במישור האוקלידי נתון משולש לא מנוון $A_1A_2A_3$. כל ההגדרות והתכונות בגיליון זה, בגיליון הסימונים, בגיליון הנוסחאות ובגיליון תרגילים א' הינן ביחס למשולש זה, אלא אם כן מצוין במפורש אחרת. כמו כן, כל האינדקסים בגיליון זה הינם מודולו 3. בנוסף, סוגריים מעוגלים בשלושת הגיליונות הנ"ל מסמנים קואורדינטות בריצנטריות אבסולוטיות, וסוגריים מרובעים – קואורדינטות בריצנטריות הומוגניות.

1. קיימת התאמה חח"ע ועל בין קבוצת כל נקודות המישור האוקלידי, לבין קבוצת כל השלשות $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ של מספרים ממשיים המקיימים: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, הנעשית באופן הבא: לנק' $P$ מתאימים את השלשה $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, שעבורה מתקיימים התנאים:

(1 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$,

(2 $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3=P$.

המספרים $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ נקראים – קואורדינאטות אבסולוטיות של P ביחס למשולש $A_1A_2A_3$.

2. מתקיים: $\lambda_i=S_{PA_{i+1}A_{i+2}}/S_{A_1A_2A_3}$, כאשר השטחים הינם מכוונים, והסימן של $\lambda_i$ הינו חיובי אם $P$ ו- $A_i$ נמצאות מאותו הצד של הישר $A_{i+1}A_{i+2}$, שלילי אם הן נמצאות מצדדים שונים של הישר הנ"ל, ו-0 אם $P$ נמצאת על הישר הנ"ל. בפרט, שלוש הקואורדינאטות האבסולוטיות של $P$ הינן חיוביות אמ"מ $P$ בתוך המשולש $A_1A_2A_3$.

3. נתאים לכל נק' $P=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ במישור האוקלידי, הנתונה בקואורדינאטות אבסולוטיות, שלשה של מספרים ממשיים $[x:y:z]$, היחידה עד כדי הכפלת המספרים בקבוע לא אפסי, המקיימת: $x:y:z=\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=S_1:S_2:S_3$, כאשר $S_i=S_{PA_{i+1}A_{i+2}}$. המספרים $x,y,z$ נקראים – קואורדינאטות הומוגניות של P ביחס למשולש $A_1\ A_2\ A_3$. שימו לב כי בהכרח $x+y+z\neq 0$. ע"מ לקבל את הקואורדינאטות האבסולוטיות של נק' הנתונה בקואורדינאטות הומוגניות, יש לחלק כל קואורדינאטה בסכומן.

4. ניתן להרחיב את ההגדרה למישור הפרוייקטיבי הממשי $\mathbb{RP}^2$, בעזרת הנוסחא: $u:v:w=S_1:S_2:S_3$. נשים לב כי עבור נק' באינסוף, מתקיים: $u+v+w=0$. זוהי משוואתו של הישר באינסוף. מעתה ואילך, נתייחס להגדרה המורחבת.

5. לכל ישר ב- $\mathbb{RP}^2$ קיימת משוואה ליניארית הומוגנית, מהצורה $pu+qv+rw=0$,

עבור $p,q,r$ ממשיים קבועים שלא כולם מתאפסים, ו- $u,v,w$ משתנים.

6. שימו לב כי <u>ניתן לאפיין כל נק'</u> ב-$\mathbb{RP}^2$ ע"י השלשה $[u:v:w]$, עבור $u,v,w$ ממשיים כלשהם, שלא מתאפסים בו-זמנית; כמו כן, <u>ניתן לאפיין כל ישר</u> ב-$\mathbb{RP}^2$ ע"י השלשה $[p:q:r]$, עבור $p,q,r$ תחת אותה ההגבלה. ניתן להגדיר ב-$\mathbb{RP}^2$ העתקת דואליות, המתאימה לנק' $[\mu_1:\mu_2:\mu_3]$ את הישר $[\mu_1:\mu_2:\mu_3]$, ולהיפך.

7. במידה ומתקיים עבור נק' $P,\ Q=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),\ R=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ ו-$\alpha,\beta$ ממשיים השונים מ-0: $P=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}Q+\frac{\beta}{\alpha+\beta}R$, אזי: $P=[\alpha\lambda_1+\beta\mu_1:\alpha\lambda_2+\beta\mu_2:\alpha\lambda_3+\beta\mu_3]$.

8. אם נק' $P$ נמצאת על ישר $QR$, אזי קיים ממשי $\alpha$ שעבורו: $P=\alpha Q+(1-\alpha)R$.

9. משוואת הישר $A_iP$ (כאשר $A_i\neq P=[\mu_1:\mu_2:\mu_3]$) הינה: $\lambda_{i+1}:\lambda_{i+2}=\mu_{i+1}:\mu_{i+2}$ (כאשר הנק' הכללית על הישר נתונה ע"י $[\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3]$). אם ישר זה חותך את הצלע $A_{i+1}A_{i+2}$ בנק' $P'$, אזי: $|A_{i+1}P'|:|P'A_{i+2}|=|\mu_{i+1}:\mu_{i+2}|$.

10. בפרט, משוואת הצלע $A_iA_{i+1}$ הינה: $\lambda_{i+2}=0$.

11. הנק' הנתונות ע"י השלשות $[u_1:v_1:w_1]$, $[u_2:v_2:w_2]$, $[u_3:v_3:w_3]$ נמצאות על ישר אחד אמ"מ $\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=0$.

בנוסף, אם נתייחס לשלשות הנ"ל כאל שלשות המאפיינות ישרים, נקבל תנאי הכרחי ומספיק לכך ששלושה ישרים ייפגשו בנק' אחת (ב-$\mathbb{RP}^2$).

12. הקואורדינאטות של הנק' באינסוף הנמצאת על ישר מסוים, הן הפרש הקואורדינאטות האבסולוטיות המתאימות של שתי נק' שונות כלשהן הנמצאות על הישר. אם הישר הנ"ל מאופיין ע"י השלשה $[p:q:r]$, אזי נקודתו באינסוף היא: $[q-r:r-p:p-q]$.

**פתרונות גיאומטריים בעזרת קואורדינטות בריצנטריות – גיליון סימונים**

| מרכזי משולש | |
|---|---|
| $M$ | מרכז כובד |
| $I$ | מרכז מעגל חסום |
| $I_a, I_b, I_c$ | מרכזי מעגלים חסומים מבחוץ |
| $O$ | מרכז מעגל חוסם |
| $H$ | מפגש הגבהים |
| $G$ | נקודת ג'רגון |
| $N$ | נקודת נגל |
| $L$ | נקודת למואן |
| $F_+$ | נק' פרמה החיובית |
| $F_-$ | נק' פרמה השלילית |

| הצמדות | |
|---|---|
| $P^{\bullet}$ | הצמודה האיזוטומית של $P$ |
| $P^*$ | הצמודה האיזוגונאלית של $P$ |

| סימוני קונווי | | |
|---|---|---|
| $S$ | פעמיים שטח המשולש | |
| $S_\varphi$ | $S \cdot \cot\varphi$ | |
| $S_{\varphi\theta}$ | $S_\varphi \cdot S_\theta$ | |
| $S_\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = S \cdot \cot\alpha = bc \cdot \cos\alpha$ | | |
| $S_\alpha + S_\beta = c^2$ | $S_\gamma + S_\alpha = b^2$ | $S_\beta + S_\gamma = a^2$ |

| איברי משולש | | |
|---|---|---|
| קודקודים | זוויות | צלעות ממול |
| $A$ או $A_1$ | $\alpha$ | $a$ |
| $B$ או $A_2$ | $\beta$ | $b$ |
| $C$ או $A_3$ | $\gamma$ | $c$ |

**הערות**

נק' ג'רגון – נק' חיתוך הישרים, המחברים קדקודי משולש לנק' ההשקה של המעגל החסום לצלע הנגדית.

נק' נאגל – נק' חיתוך הישרים, שכל אחד מהם מחבר קדקוד במשולש לנק' ההשקה של המעגל החסום בו מבחוץ (המנוגד לקדקוד הנ"ל) לצלע הנגדית.

נק' למואן – נקודת מפגש התיכושקפים (סימדיאנות).

נק' פרמה החיובית\שלילית – נק' מפגש הישרים, שכל אחד מהם מחבר קדקוד במשולש לקדקוד השלישי במש"צ הבנוי על הצלע הנגדית כלפי חוץ\פנים של $A_1A_2A_3$.

הצמודה האיזוטומית של $P$ – נק' מפגש הצ'ביאנות, שנק' חיתוכן עם צלעות המשולש סימטריות, בהתאמה, לנק' החיתוך של הצ'ביאנות של P עם צלעות המשולש, ביחס לאמצעי הצלעות המתאימות של $A_1A_2A_3$.

הצמודה האיזוגונאלית של $P$ – נק' מפגש הצ'ביאנות, הסימטריות, בהתאמה, לצ'ביאנות של $P$ ביחס לחוצי הזוויות הפנימיות המתאימות של $A_1A_2A_3$.

כל הנוסחאות בדף זה הומוגניות, פרט לנוסחת המרחק, הדורשת $x+y+z=1$.

## נקודות חשובות

| | |
|---|---|
| $M=[1:1:1]$ | $I=[a:b:c]$ |
| $L=[a^2:b^2:c^2]$ | $I_a=[-a:b:c]$ |
| $O=[\sin 2\alpha:\sin 2\beta:\sin 2\gamma]=[a^2S_\alpha:b^2S_\beta:c^2S_\gamma]$ | |

## הצמדה איזוטומית/איזוגונאלית

עבור הנק' $P=[u:v:w]$:

$$P^\bullet=\left[\frac{1}{u}:\frac{1}{v}:\frac{1}{w}\right]$$

$$P^*=\left[\frac{a^2}{u}:\frac{b^2}{v}:\frac{c^2}{w}\right]$$

## נוסחת קונווי

אם עבור נק' $P$ מתקיים:
$\sphericalangle CBP=\theta$ , $\sphericalangle BCP=\varphi$

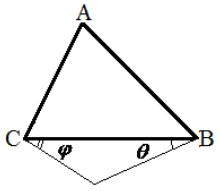
אזי: $P=[-a^2:S_\gamma+S_\varphi:S_\beta+S_\theta]$

כאשר $\theta,\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$\operatorname{sgn}\theta=\operatorname{sgn}(S_{CBP}/S_{CBA})$,

$\operatorname{sgn}\varphi=\operatorname{sgn}(S_{BCP}/S_{BCA})$

(בשטחים מכוונים)




$$G=\left[\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}\right]$$

$$H=[S_{\beta\gamma}:S_{\gamma\alpha}:S_{\alpha\beta}]=[\tan\alpha:\tan\beta:\tan\gamma]$$

$$N=[x:y:z]$$

$$F_+=\left[\tfrac{1}{\sqrt{3}}S_\alpha+S\ :\ \tfrac{1}{\sqrt{3}}S_\beta+S\ :\ \tfrac{1}{\sqrt{3}}S_\gamma+S\right]$$

$$F_-=\left[\tfrac{1}{\sqrt{3}}S_\alpha-S\ :\ \tfrac{1}{\sqrt{3}}S_\beta-S\ :\ \tfrac{1}{\sqrt{3}}S_\gamma-S\right]$$

## נוסחאות קשורות לנוסחת קונווי

$$S_\alpha=\tfrac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)$$

$$\sum_{cyc}S_{\alpha\beta}=S^2$$

**מרחק** בין $(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$, $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ שווה $\sum_{cyc}\left(S_\alpha\cdot(\lambda_1-\mu_1)^2\right)$

## משואות מעגלים

חוסם: $\sum_{cyc}a^2vw=0$.

מעגל 9 נקודות: $\sum_{cyc}a^2vw-\frac{1}{2}(u+v+w)\sum_{cyc}S_\alpha u=0$.

חסום: $\sum_{cyc}a^2vw-\frac{1}{2}(u+v+w)\sum_{cyc}x^2u=0$.

## מאונכות ישרים

הנק' באינסוף של הישרים המאונכים לישרים בעלי הנק' באינסוף $[f:g:h]$ היא:

$$[S_\beta g-S_\gamma h:S_\gamma h-S_\alpha f:S_\alpha f-S_\beta g]$$

ישרים בעלי נק' באינסוף $[f:g:h]$, $[f':g':h']$ מאונכים אם"ם

$$\sum_{cyc}S_\alpha\cdot f\cdot f'=0.$$

מעגל חסום מבחוץ ל-$a$:

$$\sum_{cyc}a^2vw-\frac{1}{2}(u+v+w)\cdot$$
$$\cdot\left(p^2u+z^2v+y^2w\right)=0$$

מעגל כללי:

$$\sum_{cyc}a^2vw+(u+v+w)\cdot(pu+qv+rw)=0$$

כאשר הישר $pu+qv+rw=0$ הוא הציר הרדיקאלי של המעגל הנ"ל עם המעגל החוסם.

**<u>פתרונות גיאומטריים בעזרת קואורדינטות בריצנטריות – גיליון תרגילים א'</u>**

1. **הוכח/י את התכונות המופיעות בגיליון ההגדרות והתכונות בסיסיות.**
2. הוכח/י, בעזרת קואורדינטות בריצנטריות, את משפטי צ'בה ומנלאוס.
3. עבור אינדקסים המחושבים מודולו 3, נסמן על צלע $A_iA_{i+1}$ נק' $B_{i+2}$, כך ששלושת הישרים $A_iB_i$ נפגשים בנק' אחת. כמו כן, נסמן על $B_iB_{i+1}$ נק' $C_{i+2}$. הוכח/י, בעזרת קואורדינטות בריצנטריות, כי הישרים $B_iC_i$ נפגשים בנק' אחת אמ"מ הישרים $A_iC_i$ נפגשים בנק' אחת.
4. הוכח/י, בעזרת קואורדינטות בריצנטריות, כי אמצעי האלכסונים של מרובע שלם נמצאים תמיד על ישר אחד.
5. **חשב את הקואורדינאטות הבריצנטריות של הנק' $M,I,I_a,O,G$.**
6. הוכח/י את הנוסחא להצמדה איזוטומית, והסק את הקואורדינאטות של N.
7. הוכח/י את הנוסחאות הכלליות בגיליון הנוסחאות.
8. **הוכח/י את נוסחת קונווי.**
9. מצא/י את הקואורדינאטות של $F_+,F_-$.
10. הוכח/י כי אם $P=[x:y:z]$, אזי השיקוף של הצ'ביאנה $A_1P$ ביחס לחוצה הזווית $A_2A_1A_3$ חותך את הישר $A_2A_3$ בנק' $[0:b^2/y:c^2/z]$.
11. **הוכח/י את הנוסחא להצמדה איזוגונאלית, והסק את הקואורדינאטות של הנק' H, L.**
12. **מצא/י את משוואת המעגל החוסם.**
13. <u>מצא/י את המשוואות של: המעגל החסום, המעגלים החסומים מבחוץ, מעגל תשע הנק' ומעגל כללי.</u>
14. (משפט פוירבאך) הוכח/י, בעזרת קואורדינטות בריצנטריות, כי מעגל תשע הנק' של משולש משיק למעגל החסום בו ולשלושת המעגלים החסומים בו מבחוץ.
15. נתון ישר l, המאופיין ע"י השלשה $[p:q:r]$, החותך את $A_2A_3,A_1A_3,A_1A_2$ בנק' $X,Y,Z$, בהתאמה.
    א. הוכח/י כי הקואורדינאטות של נקודתו באינסוף הן: $[f:g:h]=[q-r:r-p:p-q]$.
    ב. מצא/י את הקואורדינאטות של Y,Z.
    ג. מצא/י את הקואורדינאטות של הנק' באינסוף של הישרים $A_2H,A_3H$.
    ד. מצא/י את משוואות האנך מ-Y ל-$A_1A_2$ והאנך מ-Z ל-$A_1A_3$.
    ה. מצא/י את הקואורדינאטות של האורתוצנטר של משולש AYZ.
    ו. מצא/י את משוואת האנך מ-A ל-l.
    ז. **בטא/י את הקואורדינאטות של הנק' באינסוף של הישרים המאונכים ל-l בעזרת f,g,h.**
16. (*) הוכח את נוסחת המרחק.

**<u>פתרונות גיאומטריים בעזרת קואורדינטות בריצנטריות – גיליון תרגילים</u>**

1. **(תחרות קבוצתית, 19 ביוני 2012)** במשולש ABC: AK, BL גבהים, AU, BV חוצי זוויות (כאשר V,U,K,L על צלעות המשולש), P ו-Q הן נק' ההשקה של המעגל החסום לצלעות BC ו-AC, בהתאמה. הוכח/י כי VU,LK,PQ נפגשים בנק' אחת.

2. **(מבחן מיון, 21 בפברואר 2012)** נתון משולש ABC. קדקודיו מחלקים את המעגל החוסם ל-3 קשתות, ואמצעי הקשתות הללו יסומנו P, Q, R (של BC, AC, AB, בהתאמה). הקטע PQ חותך את הקטע BC ב-U ואת הקטע AC ב-V. הקטע QR חותך את הקטע AC ב-W ואת הקטע AB ב-X. הקטע PR חותך את הקטע AB ב-Y ואת הקטע BC ב-Z. הוכח/י כי WZ,VY,UX נפגשים בנק' אחת.

3. **(ISL 2009/G3)** נתון משולש ABC. המעגל החסום ב-ABC משיק ל- AB ו- AC בנקודות Z ו-Y, בהתאמה. תהא G נקודת החיתוך של הישרים BY ו-CZ, ותהיינה R ו-S נקודות כאלה, ששני המרובעים BCYR ו-BCSZ הם מקביליות. הוכח/י כי GR=GS.

4. **(IMO 2012/1)** נתון משולש ABC. הנק' J הינה מרכז המעגל החסום מבחוץ המנוגד לקדקוד A. מעגל זה משיק לצלע BC בנק' M, ולישרים AB ו-AC ב-K ו-L, בהתאמה. הישרים LM ו-BJ נחתכים ב-F, והישרים KM ו-CJ נחתכים ב-G. תהא S נק' חיתוך הישרים AF ו-BC, ותהא T נק' החיתוך של הישרים AG ו-BC. הוכח/י כי M הינה אמצע ST.

5. **(ISL 2011/G5)** יהא ABC משולש, שמרכז המעגל החסום בו יסומן I, ומעגלו החוסם – ω. תהיינה D ו-E נק' החיתוך השניות של ω עם הישרים AI ו-BI, בהתאמה. המיתר DE חותך את AC ב-F, ואת BC ב-G. תהא P נק' החיתוך שלה מקביל ל-AD דרך F והמקביל ל-BE דרך G. נניח כי המשיקים ל-ω ב-A ו-B נחתכים בנק' K. הוכח/י כי הישרים AE, BD ו-KP הינם נפגשים בנק' אחת או מקבילים זה לזה.

6. **(IMO 2010/2)** יהי I מרכז המעגל החסום של משולש ABC, ויהי Γ המעגל החוסם את המשולש. נניח כי הישר AI חותך את המעגל Γ שנית ב-D. תהי E נק' על הקשת BDC, ותהי F נק' על הצלע BC כך ש: $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. לבסוף, תהי G אמצע הקטע IF. הוכח/י כי הישרים DG ו-EI נחתכים על המעגל Γ.