תרגול: קטעי x, y, z בגיאומטריה של משולש

בתרגיל זה מדובר על משולש ABC, שרדיוס המעגל החוסם שלו R, של המעגל החסום שלו r, היקף שלו $2p$, שטחו S, ואורכי צלעותיו a, b, c (מול A, B, C בהתאמה), וזוויותיו α, β, γ. מרכז של מעגל חסום יסומן I. מרכז המעגל החסום מבחוץ לצלע BC יסומן I_a רדיוס שלו יסומן r_a, ובאופן דומה נסמן את הרדיוסים של המעגלים החסומים האחרים.

1. נסמן את אורך המשיק מנקודה A למעגל החסום ב-x, מנקודה B למעגל החסום ב-y, ומנקודה C למעגל החסום ב-z. הוכח כי $z = \frac{a+b-c}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$, $x = \frac{b+c-a}{2}$.

2. נצייר מעגל חסום מבחוץ לצלע BC. רדיוס שלו יסומן r_a, ומרכז שלו I_a. הוכח שאורכי המשיקים מקודקודי המשולש A, B, C למעגל זה הם p, z, y בהתאמה. הסק שבכל צלע של משולש, נקודות ההשקה של הצלע עם 4 מעגלים חסומים סימטריים לגבי אמצע הצלע.

3. הוכח נוסחה את הנוסחאות הבאות לשטח של משולש:

א. $S = pr$.

ב. $S = xr_a = yr_b = zr_c$.

4. א. הוכח כי $\frac{x}{r} = \frac{p}{r_a} = \frac{r_c}{y} = \frac{r_b}{z} = \cot\frac{\alpha}{2}$.

ב. הוכח כי $pxyz = S^2 = rr_ar_br_c$.

5. א. הוכח כי $S = r^2\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}\right)$.

ב. הוכח כי $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$.

6. הוכח כי

א. $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$.

ב. $r_a + r_b + r_c - r = 4R$.

7. הוכח את האי-שוויונים הבאים עבור צלעות המשולש ובדוק האם הם נכונים לשלשות כלשהן של מספרים חיוביים

א. $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc$.

ב. $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca$.

ג. $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) > \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$.

תוספת לתרגול קטעי x, y, z בגיאומטריה של משולש

1. א. נניח שצלע BC אופקית, ו-A נמצא מעליו. הוכח שהנקודה העליונה של המעגל החסום, נקודת ההשקה של מעגל החסום מבחוץ לצלע BC עם הצלע BC, ונקודה A נמצאים על ישר אחד.
ב. יהיו P ו-T נקודות השקה עם המשך הצלע BC של מעגלים משיקים מבחוץ לצלעות AB, AC. נניח כי PQ זה קוטר של אחד משני המעגלים. הוכח כי Q, T, A נמצאים על ישר אחד.

2. הוכח כי $S = p^2 \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = r^2 \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} = x^2 \tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$.

3. הוכח שבכל משולש פיתגורי הרדיוסים של המעגלים החסומים הם מספרים שלמים.

4. למספרים 5, 6 יש תכונה מעניינת: למשוואות $x^2 \pm 5x \pm 6$ יש שני שורשים שלמים, לא משנה איך תבחרו סימנים. מצא את כל זוגות המספרים מהסוג הזה.