<u>תרגיל: העתקות גיאומטריות</u>

1. התחום $0 < y < 1$ הוא נהר. צריך לבנות גשר במאונך לנהר ולבנות כביש, כך שמרחק הליכה בין נקודה $(-1,-1)$ לנקודה $(2,4)$ יהיה קצר ביותר. מהו מרחק הליכה שיהיה במקרה זה?

2. נתון משולש משוכלל ABC. יש לבנות נקודה X בתוכו, כזאת שיחס המרחקים AX:BX:CX הוא 4:5:6.

3. על הצלעות של משולש חד-זוויות ABC נבנו קלפי חוץ משולשים משוכללים ABZ, BCX, ACY.
א. הוכח כי AX = BY = CZ.
ב. הוכח כי AX , BY , CZ נחתכים בזוויות של 60 מעלות.
ג. הוכח כי לכל נקודה P במישור PA + PB + PC ≥ AX.
ד. יהיה D מרכז המשולש BCX, E מרכז של המשולש ACY. מהי הזווית בין הישר DE לישר AX?
ה. מהו היחס בין אורכי הקטעים AX ו-DE מהסעיף הקודם?

4. לצלעותיו של משולש ABC הצמידו מבחוץ ריבועים. מרכזי הריבועים מסומנים X, Y, Z (הריבוע של Z הוצמד לצלע AB). הוכח כי הקטעים CZ, XY שווים באורכם ומאונכים.

5. ריבוע חולק לשתי צורות חופפות על ידי קו. הוכח כי הקו עובר דרך מרכז הריבוע.

6. מצולעים $P_1P_2...P_n$, $Q_1Q_2...Q_n$ חופפים. מצולע $P_1P_2...P_n$ חסום במעגל. M_i זה אמצע הקטע P_iQ_i. הוכח כי הנקודות $M_1, M_2, ..., M_n$ נמצאות על ישר אחד או על מעגל אחד.

7. נתונים שני מעגלים a, b. סדרה אינסופית של מעגלים $\{c_n\}$ נבנתה כך, ש-c_n משיק ל-a, b וגם ל-c_{n-1}.
א. האם אפשר לטעון שמרכזי המעגלים c_n נמצאים על מעגל מוכלל (כלומר מעגל או ישר)?
ב. האם אפשר לטעון שנקודות ההשקה של c_n, c_{n-1} נמצאים על מעגל מוכלל?
ג. האם אפשר לטעון שהמשיקים המשותפים של c_n, c_{n-1} בנקודות ההשקה נפגשים בנקודה אחת? אם כן, איפה נמצאת הנקודה הזאת?

8. נתונה אליפסה ששטחה S. מהו השטח המקסימלי שיכול להיות למחומש שחוסם אותה?

9. ABCDE מחומש קמור. בטא את שטחו S באופן מפורש באמצעות $s_1 = S_{ABC}$, $s_2 = S_{BCD}$, $s_3 = S_{CDE}$, $s_4 = S_{DEA}$, $s_5 = S_{EAB}$.

10*. משפט ידוע של ניוטון אומר, שקליפה כדורית אחידה לא מושכת מסה נקודתית פנימית כי הכוחות מכיוונים שונים מתקזזים. הוכח את הגרסה החיצונית של אותו משפט: לכל מסה נקודתית מחוץ לקליפה, החלק הנראה מושך אותה באותו כוח כמו החלק הבלטי נראה.