ט בניסן תשע"ב 1.4.2012

אולימפיאדה במתמטיקה, מחנה פסח

מבחן 4, קבוצת רותם.

1. נתונים $n,k>1$ כך שלמספר n^k יש בדיוק 5772 מחלקים. הוכח כי n הוא יכול להיות רק ראשוני או ראשוני בחזקת ראשוני.

2. מצא את כל הפונקציות מקבוצת הממשיים החיוביים לעצמה שמקיימות $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}+y\cdot f(x)\right)=f(y+1)$ לכל $x,y>0$.

3. נתון מרובע $ABCD$. על כל צלע שלו נבחרו שתי נקודות שלא מתלכדות עם קודקודיו: נקודות A_1,A_2 על הצלע AB, נקודות B_1,B_2 על הצלע BC, נקודות C_1,C_2 על הצלע CD ונקודות D_1,D_2 על הצלע DA. הישרים AB_1, A_1B_2, A_2C נפגשים בנקודה אחת. הישרים BC_1, B_1C_2, B_2D נפגשים בנקודה אחת. הישרים CD_1, C_1D_2, C_2A נפגשים בנקודה אחת. הוכח שהישרים DA_1, D_1A_2, D_2B נפגשים בנקודה אחת או מקבילים.

4. בכל משבצת של טבלא ריבועית 17×17 נמצא + או –. בכל מהלך בוחרים רצף באורך כלשהו בשורה או בעמודה כלשהי והופכים כל סימן ברצף זה. כמה מהלכים דרושים, בשביל להגיע לטבלא שבה יש רק פלוסים (במקרה הגרוע)?

בהצלחה!

ט בניסן תשע"ב 1.4.2012

אולימפיאדה במתמטיקה, מחנה פסח

מבחן 4, קבוצת ירדן

1. לכל מספר טבעי n נסמן ב-$f(n)$ את כמות המחלקים שלו שקטנים ממנו. הוכח כי אם $f(n)$ מתחלק ב-3 וגם $f(n^2)$ מתחלק ב-3 אז $\sqrt[3]{n}$ שלם.

2. במדינה מסוימת, בה יש שלוש מפלגות, הבחירות לנשיאות מתקיימות בדרך הבאה: המצביעים מחולקים לועדות של שלושה, וכל ועדה בוחרת נציג. כעת הנציגים מחולקים לועדות של שלושה, וכל אחת מהן בוחרת נציג, וכך הלאה, עד לנשיא. בכל פעם שועדה בוחרת נציג, אם יש מפלגה אחת שיש לה יותר נציגים מאשר לכל מפלגה אחרת, הנציג יבחר מטעמה; אחרת, יבחר נציג שאין לו שיוך מפלגתי, ולכן לא ישפיע על תוצאות הבחירות בועדה שבה הוא מצביע. אם יש במדינה 3^n מצביעים, שכולם נציגים של איזושהי מפלגה, מה המספר המינימלי מתוכם שצריכים להיות מהמפלגה של הנשיא הנוכחי כדי שהוא יבחר שוב, בהנחה שהוא קובע איך יתחלקו כל הועדות?

3. משולש נקרא טוב אם יש לו צלע באורך 5 שהזווית מולה שווה 30°, וצלע באורך 8. למה יכול להיות שווה שטח של משולש טוב? האם אפשר להרכיב משושה משוכלל ממשולשים טובים?

4. מצא את כל הפונקציות מקבוצת הממשיים החיוביים לעצמה שמקיימות $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}+y\cdot f(x)\right)=f(y+1)$ לכל $x,y>0$.

בהצלחה!

י"ב בניסן תשע"ב 4.4.2012

אולימפיאדה במתמטיקה, מחנה חורף

מבחן 5, קבוצת רותם.

1. נתון מחומש קמור Z, שכל אלכסון שלו מקביל לאחת מהצלעות שלו. אלכסוניו הם המשכי הצלעות של מחומש W, שנמצא בתוך Z. מה הוא היחס בין השטח של Z לשטח של W?

2. פיצול של קבוצה לשתי קבוצות זרות נקרא חלוקה. לכל קבוצה של N נקודות שונות במישור, ניתן להתבונן ב-

(א) חלוקות באמצעות קו ישר שלא עובר דרך אף נקודה

(ב) חלוקות באמצעות מעגל שלא עובר דרך אף נקודה

מהי הכמות המרבית של חלוקות שיתכנו עבור N מסוים, בכל אחת משתי האפשרויות?

3. נסמן ב-$\sigma_m(x_1,...,x_n)$ את סכום המכפלות של כל תתי הקבוצות בגודל m של $x_1,x_2,...,x_n$ (הפולינומים של וייטא). יהיו $m,k\geq 0$ מספרים שלמים כך ש- $m+k<n$, ו- $x_1,x_2,...,x_n$ מספרים ממשיים כך ש- $x_i\neq x_j$ לכל $i\neq j$. הוכח את הזהות:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k\cdot\sigma_m(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}=\begin{cases}(-1)^m, & m+k=n-1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}.$$

4. קבוצת נקודות במישור נקראת סבירה, אם קיים פולינום בשני משתנים $p(x,y)$ שאינו 0 זהותית, שמתאפס בכל הנקודות של הקבוצה (יכול להתאפס גם בנקודות אחרות). קבוצה שהיא לא סבירה, כלומר כזאת שכל פולינום שמתאפס בכל הנקודות שלה חייב להתאפס בכל הנקודות של המישור, תקרא קבוצה פרועה. נסמן ב- d_n את כמות הספרות ברישום העשרוני של 4^n, וב- e_n את כמות הספרות של 5^n.

א. האם קבוצת הנקודות (d_n,e_n) לכל n טבעי, היא סבירה או פרועה?

ב. האם קבוצת הנקודות $(d_n,n-e_n)$ לכל n טבעי, היא סבירה או פרועה?

בהצלחה!

י"ב בניסן תשע"ב 4.4.2012

אולימפיאדה במתמטיקה, מחנה חורף

מבחן 5, קבוצת ירדן.

1. נאמר שמספר A מתחיל במספר B אם אפשר לקבל את B ברישום העשרוני מ-A כאשר מוחקים מספר ספרות מצד ימין. למשל 256 מתחיל ב-25.
הוכח כי אם 2^n מתחיל ב-5^k, אז 5^n מתחיל ב-2^k-1.

2. נתון מחומש קמור Z, שכל אלכסון שלו מקביל לאחת מהצלעות שלו. אלכסוניו הם המשכי הצלעות של מחומש W, שנמצא בתוך Z. מה הוא היחס בין השטח של Z לשטח של W?

3. א. הוכח שניתן לחתוך מלבן ל-15 מצולעים לא קמורים וחופפים.
ב. האם ניתן לעשות זאת גם עבור ריבוע?

4. נסמן ב-$\sigma_m(x_1,...,x_n)$ את סכום המכפלות של כל תתי הקבוצות בגודל m של $x_1,x_2,...,x_n$ (הפולינומים של וייטא). יהיו $m,k\geq 0$ מספרים שלמים כך ש-$m+k<n$, ו-$x_1,x_2,...,x_n$ מספרים ממשיים כך ש-$x_i\neq x_j$ לכל $i\neq j$. הוכח את הזהות:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k\cdot\sigma_m(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}=\begin{cases}(-1)^m, & m+k=n-1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}.$$

בהצלחה!