תרגיל 9

1. מצא את כל זוגות השלמים שמקיימים את המשוואה $1+x^2y=x^2+2xy+2x+y$.

פתרון. נאסוף את המחוברים של y בצד אחד, ואת המחוברים בלי y מצד שני:

$$y\left(x^2-2x-1\right)=x^2+2x-1$$

ובכן, x^2+2x-1 מתחלק ב-x^2-2x-1. זה מוזר, כי שני המספרים שווים בערך ל-x^2, לכן היחס קרוב ל-1 (למספרים מספיק גדולים), אבל הם שונים לכן היחס שונה מ-1. נשאר להפוך את השיקול האינטואיטיבי הזה לטיעון מתמטי.

קודם ננסה להוכיח כי $x^2-2x-1>0$. זאת אומרת: $\left(x-1\right)^2>2$, וזה נכון כל עוד $x-1$ אינו $-1,0,1$ כלומר כאשר $x=0,1,2$.

את המקרים האלה נבדוק בנפרד.

עבור $x=0$ מקבלים $y\cdot\left(-1\right)=-1$. כלומר $y=1$.

עבור $x=1$ מקבלים $y\cdot\left(-2\right)=2$. כלומר $y=-1$.

עבור $x=2$ מקבלים $y\cdot\left(-1\right)=7$. כלומר $y=-7$.

כבר קיבלנו 3 פתרונות, ומרגע זה נניח כי $x\neq 0,1,2$, וגם מותר להניח כי $x^2-2x-1>0$.

ננסה להוכיח את הטענה הבאה: $\boxed{2\left(x^2-2x-1\right)>x^2+2x-1>0}$. זה יגרור מיד $y=1$.

ובכן, $x^2+2x-1>0$ כאשר $\left(x+1\right)^2>2$ וזה תמיד כאשר $x+1\neq -1,0,1$, כלומר $x\neq -2,-1,0$. את המקרה $x=0$ בדקנו בנפרד, ועכשיו נבדוק בנפרד גם $x=-2,-1$.

עבור $x=-1$ מקבלים $y\cdot 2=-2$. כלומר $y=-1$.

עבור $x=-2$ מקבלים $y\cdot 7=-1$, ואין y שלם שמקיים את זה.

מעכשיו נניח ש-$x\neq -2,-1,0,1,2$ ואז באמת $x^2+2x-1>0$. ננסה להוכיח את החלק השני של אי-שוויון ממוסגר: $2\left(x^2-2x-1\right)>x^2+2x-1$.

כלומר $x^2-6x-1>0$. כלומר $\left(x-3\right)^2>10$. כלומר $x-3\neq -3,-2,-1,0,1,2,3$.

זה קורה כאשר $x\neq 0,1,...,6$.

שוב, יש מספר סופי של מקרים שצריך לבדוק בנפרד $0\le x\le 6$, אבל חוץ מהמקרים האלה האי-שוויון הממוסגר נכון, ואז $0<y<2$ ואז $y=1$ ואז $x^2-2x-1=x^2+2x-1$ ולכן $4x=0$ ולכן $x=0$. אבל זה מקרה שכבר בדקנו.

נשאר לנו לבדוק את המקרים שבהם $3\le x\le 6$ (כי 0, 1, 2 נבדקו קודם).

$y\left(x^2-2x-1\right)=x^2+2x-1$ שקול ל- $\left(y-1\right)\left(\left(x-2\right)x-1\right)=4x-2$.

ובכן, עבור $x=3$ נקבל $(y-1)(3-1)=10$ כלומר $y-1=5$ ואז $y=6$.
עבור $x=4$ נקבל $7(y-1)=14$ כלומר $y-1=2$ ואז $y=3$.
עבור $x=5$ נקבל $14=18(y-1)$ וזה מוביל ל-y לא שלם.
עבור $x=6$ נקבל $21=22(y-1)$ וזה מוביל ל-y לא שלם.

תשובה: $(4,3),(3,6),(2,-7),(1,-1),(0,1),(-1,-1)$.

2. נתבונן בסדרת פיבונצ'י f_n. כאשר k קבוע, אבל n יכול להשתנות, מהוא הערך הגדול ביותר האפשרי שיכול להיות למחלק המשותף המכסימלי של f_n ו- f_{n+k}?

פתרון. נקבע כי $f_0=0, f_1=1$ (הרי לפעמים מתחילים ב-1,1).
נשים לב שמספרי פיבונצ'י אחרי f_n : ניתן לבטא ע"י f_n, f_{n+1}
$f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$,

$f_{n+3}=f_{n+1}+f_{n+2}=f_n+2f_{n+1}$,
$f_{n+4}=f_{n+2}+f_{n+3}=2f_n+3f_{n+1}$,
וכך הלאה, אנחנו מקבלים את f_{n+k} כסכום של f_n, f_{n+1} עם מקדמים, וגם המקדמים הם מספרי פיבנצ'י: $\boxed{f_{n+k}=f_{k-1}f_n+f_kf_{n+1}}$.
ברגע שניסחנו את הנוסחה הזאת, ממש קל להוכיח אותה באינדוקציה, וזה תרגיל לקורא.

נזכיר כי (a,b) מסמן את המחלק המשותף המרבי של a,b.
אז $(2,1)=...=(f_{n-2},f_{n-1})=(f_n-f_{n-1},f_{n-1})=(f_n,f_{n-1})$. לכן מספרי פיבונצ'י עוקבים תמיד זרים. לכן $(f_n,f_{n+k})=(f_n,f_{k-1}f_n+f_kf_{n+1})=(f_n,f_kf_{n+1})=(f_n,f_k)\le f_k$.
אבל זה יכול להיות שווה ל-k, למשל כאשר $n=k$ או $n=0$.

3. מצא את כל המספרים הטבעיים k בעלי התכונה הבאה: אם ניקח מספר כלשהו שמתחלק ב-k, ונרשום את הספרות שלו בסדר הפוך, נקבל שוב מספר שמתחלק ב-k.

תשובה. כל המחלקים של 99.
פתרון. ברור כי k זר ל-10, הרי יש מספרים שמתחלקים ב-k ומתחילים ב-1, ואם נהפוך מספר כזה נקבל מספר שלם שזר ל-10, והוא גם אמור להתחלק ב-k.
לכן אפשר לבחור כזה m שעבורו $10^m = 1 \pmod k$.
נתבונן במספר $A=\left(1+10^m+10^{2m}+...+10^{2nm}\right)-10^{nm}+10^{nm+1}$.
ברישום העשרוני שלו מופיעים אחדים ואפסים, כאשר כמעת כל האחדים נמצאים במרחקים שווים, רק ש-1 באמצע מוזג שמאלה. אז $A=2n+10 \pmod k$. היות ו-2 זר ל-k, אפשר לבחור כזה n שעבורו A יתחלק ב-k. גם המספר B הסימטרי ל-A אמור להתחלק ב-k. לכן $A-B=10^{nm+1}-10^{nm-1}=99\cdot 10^{nm-1}$. מתחלק ב-$k$. אבל ראינו ש-$k$ זר ל-10, לכן 99 מתחלק ב-k.
כל מחלק של 99 מקיים את התנאי: זה נובע מסימני החלוקה ב-3, ב-9, וב-11.

4. מספרים $a_1,a_2,...,a_n$ שלמים. הוכח כי $\prod_{1\le i<j\le n}\left(a_i-a_j\right)$ מתחלק ב-$\prod_{1\le i<j\le n}(i-j)$.

פתרון. ניקח מספר q כלשהו, ונבדוק כמה מבין הגורמים של מכפלה $A=\prod_{1\le i<j\le n}\left(a_i-a_j\right)$ וכמה מבין הגורמים במכפלה $B=\prod_{1\le i<j\le n}(i-j)$. זה כמו לספור כמה מבין זוגות a_i,a_j שקולים במקרה הראשון $\bmod q$, וכמה מבין הזוגות i,j שקולים במקרה השני $\bmod q$.
במקרה השני לכל שארית $\bmod q$ יש בערך אותו מספר של מספרים שמקבלים אותה, כלומר $k=\left\lfloor\frac{n}{q}\right\rfloor$ או $k+1$ לכל שארית, ואז כמות של זוגות באותה שארית היא סכום של $\binom{k}{2}$ עבור חלק מהשאריות פלוס סכום של $\binom{k+1}{2}$ עבור שאריות אחרות.
עבור B כמות הגורמים שמתחלקים ב-q היא $\sum_{i=1}^{q}\binom{k_i}{2}$, כאשר k_i זה כמות של מספרים שיש להם שארית מסוימת, $\sum k_i=n$. זה שקול לשאלה קומבינטורית: אם יש n כדורים ב-q קופסאות, מהי הכמות המינימלית של זוגות כדורים באותה קופסה.
כמובן שכמות תלויה ב-n. כל פעם שמוסיפים כדור נוסף, כמות הזוגות תגדל הכי פחות אם מוסיפים את הכדור לקופסה עם הכי פחות כדורים. לכן באינדוקציה כמות הזוגות מינימלית כאשר בכל הקופסאות יש כמעת אותה כמות של כדורים (המשמעות של כמעת זה שההפרשים לא עולים על 1). זה מוכיח, שלכל q, במכפלה A לא פחות גורמים שמתחלקים ב-q מאשר במכפלה B.
עם יש מכפלה $C=\prod c_i$ אז אפר לחשב את הדרגה של מספר ראשוני p בפירוק של C לראשוניים בצורה כזאת: לספור כמה גורמים במכפלה מתחלקים ב-p, להוסיף את מספר הגורמים שמתחלקים ב-p^2, להוסיף את כמות הגורמים במכפלה שמתחלקים ב-p^3, וכך להמשיך עד שנגיע לחזקות גבוהות של p, כאלה שאף גורם לא מתחלק בהם.
אם נשתמש בשיטה זו בשביל להבין, באיזה חזקה של p מתחלקת המכפלה A, ובאיזה חזקה מתחלקת המכפלה B, המספר הראשון אף פעם לא יעלה על המספר השני (לפי הטענה שהוכחנו). לכן B מתחלק ב-A.

5. a,b מספרים טבעיים, $k=\frac{a+1}{b}+\frac{b}{a}$ שלם. הוכח כי $k=3$.

פתרון. נעשה מחנה משותף: $k=\frac{a^2+b^2+a}{ab}$.
די ברור ש-$k>2$, הרי $a,b>0$, וכידוע $\frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2$.
בהינתן k, אפשר לרשום את זה בתור משוואה ריבועית עבור b:
$b^2-kab+\left(a^2+a\right)=0$.

עם b מספר שלם שמקיים את המשוואה, אז גם השורש השני b_2 של המשוואה הוא שלם, לפי משפט וייטא: $b+b_2=ka$. דבר נוסף: אם $b>0$, אז גם $b_2>0$, הרי לפי משפט וייטא מכפלתם $bb_2=a^2+a$ חיובית.

מצד שני, אם $b\geq a+1$, אז $b_2\leq a$, הרי אחרת $bb_2>a(a+1)=a^2+a$.

לכן אם $b\geq a+1$, אז אפשר לעבור מזוג a,b לזוג a,b_2 של מספרים עם סכום קטן יותר, עם אותו k.

כעת נרשום אותה משוואה כמשוואה ריבועית עבור a:

$$a^2-(kb-1)a+b^2=0$$

יש שני שורשים a,a_2. סכומם שלם, ומכפלתם חיובית $=b^2$, לכן גם a_2 שלם וחיובי. אם $a>b$, אז $a_2=\frac{b^2}{a}<b$. לכן אם $a<b$, אז אפשר לעבור מזוג a,b לזוג a_2,b של מספרים יותר קטנים, עם אותו k.

לכן נגיע למצב שבו $a=b$, ואז $k=\frac{2a^2+a}{a^2}$. בשביל שזה יתחלק חייבים $a=1$ ואז $k=3$.