תרגיל 8

1. עבור $x,y,z>0$ הוכח כי

א. $\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}}\geq\sqrt{x+y+z}$.

ב. $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}$.

ג**. $\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}}\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{2}}$.

פתרון. א. נגדיל כל מכנה בצד שמאל: במקום כל ביטוי מסוג $\sqrt{x+y}$ נרשום $\sqrt{x+y+z}$.

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}}\geq\frac{x}{\sqrt{x+y+z}}+\frac{y}{\sqrt{x+y+z}}+\frac{z}{\sqrt{x+y+z}}=\frac{x+y+z}{\sqrt{x+y+z}}=\sqrt{x+y+z}$$

ב. פתרון ראשון.

נסמן $A=\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}$, $B=\frac{y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{z}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{x}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}$ (שזה הביטוי הסימטרי). נשים לב כי

$$A-B=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{y-z}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{z-x}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{y}-\sqrt{z}+\sqrt{z}-\sqrt{x}=0$$

לכן בעצם $A=B$. לכן במקום $A\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}$, אפשר להוכיח $A+B\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.
זה יותר טוב כי זה סימטרי. ובכן, צריך להוכיח

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{y+z}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{z+x}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

זהו סכום של שלושה אי-שוויונים מסוג: $\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$. אלה אי-שוויונים קלים מאוד: נכפיל במכנה ונקבל $2x+2y\geq\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$, או לאחר פתיחת סוגריים $2x+2y\geq x+y+2\sqrt{xy}$, וכאשר מעבירים הכול לצד שמאל נקבל $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq0$.

פתרון שני: נשתמש באי-שוויון קושי-שוורץ בצורה ההפוכה: $\frac{a^2}{k}+\frac{b^2}{m}+\frac{c^2}{n}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{k+m+n}$.

אז $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}\geq\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)}\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}$.

ג. בשביל להקל על החיים, נציב $x=a^2, y=b^2, z=c^2$, כאשר $a,b,c>0$ וצורת האי-שוויון

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^2+a^2}}\geq\frac{a+b+c}{\sqrt{2}}$$

נעלה בריבוע את שני האגפים: $\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)^2\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2}$

נפתח סוגריים $\boxed{\sum_{cyc}\left(\frac{a^4}{a^2+b^2}+\frac{2a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}}\right)\geq\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{2}+ab\right)}$ (*)

נתבונן במחובר השני $\sum_{cyc}P_{ab}\cdot Q_{bc}=\sum_{cyc}\frac{2a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}$, ונסה להפעיל עליו את אי-שוויון תמורות. $P_{ab}=\frac{2a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$, לכן כמה שהמספרים a,b יותר גדולים כך גם המונה יותר גדול והמכנה יותר קטן, ואז P_{ab} יותר גדול (למשל אם $a<b<c$ אז $P_{ab}<P_{ac}<P_{bc}$. להפך, אם $Q_{bc}=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}$, אז כמה ש-$b,c$ יותר גדולים כך גם Q_{bc} יותר קטן (למשל אם $a<b<c$ אז $P_{ab}>P_{ac}>P_{bc}$). לכן מבין כל המכפלות של $\sum P_*\cdot Q_*$ התמורה של השמות המתאימים היא התמורה של הסדר ההפוך, והיא נותנת את הערך הקטן ביותר, לכן $\sum_{cyc}P_{ab}\cdot Q_{bc}>\sum_{cyc}P_{ab}\cdot Q_{ab}$ כלומר $\sum_{cyc}\frac{2a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}\geq\sum_{cyc}\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$.

לכן בשביל להוכיח את (*) מספיק להוכיח כי

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^4}{a^2+b^2}+\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\geq\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{2}+ab\right).$$

בצד שמאל יש מחובר לא סימטרי $\frac{a^4}{a^2+b^2}$. נשים לב כי אם נחסיר בין איבר זה לדבר הסימטרי שלו, נקבל $\frac{a^4}{a^2+b^2}-\frac{b^4}{a^2+b^2}=\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}=a^2-b^2$.

לכן $\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^2+b^2}-\sum_{cyc}\frac{b^4}{a^2+b^2}=0$, ולכן במקום $\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^2+b^2}$ ניתן לכתוב ביטוי סימטרי

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}$$

לכן נשא להוכיח כי $\sum_{cyc}\left(\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\geq\sum_{cyc}\left(a^2+2ab\right)$.

כלומר $\sum_{cyc}\left(\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2+b^2}+\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\geq\sum_{cyc}\left(a^2+2ab\right)$

$$\sum_{cyc}\left(a^2+b^2+\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\geq\sum_{cyc}\left(a^2+2ab\right)$$

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\geq\sum_{cyc}2ab$$

את זה נפצל לסכום של שלושה אי-שוויונים מסוג $\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\geq 2ab$.

נסמן $u^2=\frac{a^2+b^2}{2}$, $v^2=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$. אז בעצם צריך להוכיח כי $u^2+v^2\geq 2uv$.
זה נכון, מפני ש- $(u-v)^2\geq 0$.

2. a,b מספרים חיוביים. הוכח כי

א. $\left(a^a\cdot b^b\right)^{\frac{1}{a+b}}\geq\frac{a+b}{2}$.

ב. $\left(a^a\cdot b^b\right)^{\frac{2}{a+b}}\geq\frac{a^2+b^2}{2}$.

פתרון. א. קל לבדוק כי $x\ln x$ זו פונקציה קמורה. אכן, נגזרתה שווה $1+\ln x$, וזה פונקציה עולה עבור x חיובי. לכן $\frac{a\ln a+b\ln b}{2}\geq\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}$. נצמצם $\frac{1}{2}$, נעלה e בחזקת שני האגפים, ונקבל מש"ל.

ב. $\left(a^a\cdot b^b\right)^{\frac{2}{a+b}}\geq\frac{a^2+b^2}{2}$

נחלק את שני האגפים ב- a^2. נקבל $a^{\frac{2a}{a+b}-2}\cdot b^{\frac{2b}{a+b}}\geq\frac{1^2+(b/a)^2}{2}$.

$$a^{\frac{-2b}{a+b}}\cdot b^{\frac{2b}{a+b}}\geq\frac{1^2+(b/a)^2}{2}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2b}{a+b}}\geq\frac{1^2+(b/a)^2}{2}$$

$$x^{\frac{2}{1+1/x}}\geq\frac{1+x^2}{2}$$

כאשר $x=\frac{b}{a}$. כלומר $x^{\frac{2x}{1+x}}\geq\frac{1+x^2}{2}$.

אפשר להניח ללא הגבלת הכלליות (להה"כ) כי $b\geq a$, כלומר $x\geq 1$.
ניקח לוגריתם, ונעביר הכול שמאלה. נקבל

$$\frac{2x}{1+x}\ln x-\ln\frac{1+x^2}{2}\geq 0$$

נגזור את הפונקציה $f(x)=\frac{2x}{1+x}\ln x-\ln\frac{1+x^2}{2}$. נקבל:

$$f'(x)=\left(\frac{2x}{1+x}\ln x-\ln\frac{1+x^2}{2}\right)'=\frac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2}\ln x+\frac{2}{1+x}-\frac{2x}{1+x^2}=$$

$$=\frac{2}{(1+x)^2}\ln x+\frac{2(1+x^2)-2x(1+x)}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{2}{(1+x)^2}\ln x+\frac{2-2x}{(1+x)(1+x^2)}$$

נסמן: $\frac{(1+x)^2}{2}\cdot f'(x)=\ln(x)+\frac{1-x^2}{1+x^2}=g(t)$. אז

$$g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-4x}{(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{x(1+x^2)^2}=\frac{(1-x^2)^2}{x(1+x^2)^2}\geq 0$$

עבור $x\geq 0$. לכן $g(x)\geq g(1)=0$ עבור $x\geq 1$.

לכן $f'(x)\geq 0$ עבור $x\geq 1$. לכן $f(x)\geq f(1)=0$ עבור $x\geq 1$. מש"ל

3. עבור $x,y,z\geq 0$ הוכח כי $\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\leq\frac{1}{8}$.

פתרון. דבר ראשון שעולה לראש זה להכפיל במכנה ולפתוח סוגריים. יחד אם זאת, מומלץ לחשוב לפני שעושים את זה: האם אפשר לרשום אי-שוויון בצורה שתחסוך חלק מסוים מפתיחת הסוגריים? נסמן $a=x+1$, $b=y+1$, $c=z+1$. ואז $a,b,c\geq 1$, וצריך להוכיח $\frac{1}{a+b+c-2}-\frac{1}{abc}\leq\frac{1}{8}$. כעת יהיה יותר קל לפתוח סוגריים. לפני שנכפיל במכנה נשתמש באי-שוויון בממוצעים: $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$, ולכן $\frac{1}{a+b+c-2}\leq\frac{1}{3\sqrt[3]{abc}-2}$.

לכן אם נסמן $t=\sqrt[3]{abc}$ (ונזכור כי $t\geq 1$), אז מספיק להראות כי $\frac{1}{3t-2}-\frac{1}{t^3}\leq\frac{1}{8}$.

נשאר אי-שוויון שמשתנה אחד, ואם נכפיל אותו במכנה (תרגיל לקורא) נקבל

$$8(t^3-3t+2)\leq t^3(3t-2)$$

$$0\leq 3t^4-10t^3+24t-16$$

כלומר אי-שוויון שמבוסס על פולינום במשתנה אחד.

נשים לב שכמה שמקדם יותר נמוך מבחינת הדרגה, הוא מתחלק בחזקה יותר גדולה של 2. נחלק אותו ב-16 ונקבל: $0\leq 3\cdot(t/2)^4-5\cdot(t/2)^3+3\cdot(t/2)-1$. אם נסמן $w=t/2$ נקבל אי-שוויון עם פולינום פחות מפחיד $0\leq 3w^4-5w^3+3w-1$, כש-$w\geq\frac{1}{2}$.

סכום המקדמים של פולינום זה 0, לכן 1 הוא שורש שלו ולכן הוא מתחלק ב-$w-1$. אכן,

$$3w^4-5w^3+3w-1=(w-1)(3w^3-2w^2-2w+1)$$

שוב קיבלנו פולינום שסכום המקדמים שלו 0, לכן אפשר שוב לחלק ב-$w-1$.

$$3w^3-2w^2-2w+1=(w-1)(3w^2+w-1)$$

אז בעצם מספיק להוכיח כי $0\leq(w-1)^2\cdot(3w^2+w-1)$, כש-$w\geq\frac{1}{2}$.

ברור כי $0 \le (w-1)^2$. לכן מספיק לבדוק $0 \le 3w^2+w-1 = p(w)$, כש-$w \ge \frac{1}{2}$.
$p(w)$ זה פולינום ריבועי, שיש לו ערכים שליליים בקטע פתוח שמכיל את 0, אבל מימין לקטע סגור זה הוא חיובי. $0 < p(\frac{1}{2})$, לכן גם w נמצא מימין לתחום השלילי. מש"ל.

4. א. הוכח את ההכללה של משפט פיתגורס: סכום ריבועי האלכסונים במקבילית שווה לסכום ריבועי צלעותיה. הסק מכאן את הנוסחה לאורך התיכון באמצעות אורכי צלעות המשולש.

ב. יהי a,b,c צלעות המשולש, m_a,m_b,m_c תיכוניו (m_a הוא תיכון ל-a וכדומה). הוכח כי

$$\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

ג*. בסימונים של הסעיף הקודם, הוכח כי $\frac{m_a m_b}{ab}+\frac{m_b m_c}{bc}+\frac{m_c m_a}{ca} \ge \frac{9}{4}$.

פתרון. א. למשל בווקטורים:

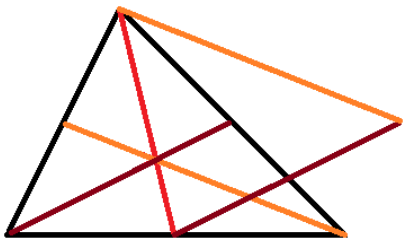
$$\langle u+v,u+v\rangle+\langle u-v,u-v\rangle =$$
$$=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle+\langle u,u\rangle-2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=2\langle u,u\rangle+2\langle v,v\rangle$$

מכאן מתקבלת הנוסחא לתיכון. נצייר ליד משולש חופף, שמסובב ביחס למשולש המקורי ב-180° ביחס לאמצע הצלע. אז נוצר מקבילית, שצלעותיו b,c, ואלכסוניו $a,2m_a$.

לכן לפי ההכללה של משפט פיתגורס $a^2+(2m_a)^2=2b^2+2c^2$, ומכאן מתקבלת הנוסחה לתיכון $\boxed{m_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}}$.

לפני שניגש לסעיפים הבאים, נראה טענה מעניינת על תיכונים

דואליות בין תיכונים לצלעות. אם m_a,m_b,m_c אורכי התיכונים במשולש שצלעותיו a,b,c, אז קיים גם משולש שצלעותיו m_a,m_b,m_c, וארכי התיכונים שלו שווים $\frac{3}{4}a,\frac{3}{4}b,\frac{3}{4}c$.



הוכחה בציור (מזיזים את התיכונים בלי לסובב אותם, ונוצר משולש שרוצים למצוא).

ב. נציב באי-שוויון שלנו את הנוסחה לתיכון שפיתחנו. נקבל שצריך להוכיח כי:

$$\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{a}+\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{b}+\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{c} \ge 3\sqrt{3}$$
$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{a^2}} \ge 3\sqrt{3}$$

כידוע, $2\sqrt{xy} \le x+y$, בפרט $2\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2}\cdot 1} \le \frac{2b^2+2c^2+2a^2}{3a^2}$.

אם $k \le \ell$, אז $\frac{1}{k} \ge \frac{1}{\ell}$, בפרט $\sqrt{\frac{3a^2}{2b^2+2c^2-a^2}} \ge \frac{3a^2}{a^2+b^2+c^2}$.

או בקיצור $\frac{a}{m_a} \ge \frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2+c^2}$. נחבר שלוש אי-שוויונים מסוג זה, ונקבל $\boxed{\sum_{cyc}\frac{a}{m_a} \ge 2\sqrt{3}}$.

זה הפוך למה שרצינו: רצינו שיהיו שברים מסוג $\frac{m_a}{a}$. אבל יש דואליות בין תיכונים לצלעות: אם נציב במקום a,b,c את m_a,m_b,m_c אז במקום m_a,m_b,m_c צריך להציב $\frac{3}{4}a,\frac{3}{4}b,\frac{3}{4}c$, ואז נקבל $\frac{4}{3}\sum_{cyc}\frac{a}{m_a}\geq 2\sqrt{3}$, כלומר $\sum_{cyc}\frac{a}{m_a}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}$. מש"ל.

ג. $\frac{m_am_b}{ab}+\frac{m_bm_c}{bc}+\frac{m_cm_a}{ca}\geq\frac{9}{4}$

פתרון ראשון. נשתמש בנוסחה לתיכון. צריך בעצם להוכיח, שאם a,b,c הן צלעות של משולש, אז $\sum_{cyc}\frac{\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}{ab}\geq 9$.

כמו בהרבה אי-שוויונים שקשורים למשולש, ניתן להציב $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$ (הצבה זאת נקראת הצבת Ravi). הצבה זאת מאפשרת לעבור באי-שוויון שמתקיים רק לצלעות המשולש, כלומר כזה שבהוכחה שלו צריך להשתמש ב-$a+b>c$ ועוד שני אי-שוויוני משולש דומים בדרך מורכבת כלשהי, לאי-שוויון שמתקיים לשלישייה כלשהי של מספרים חיוביים x,y,z.

נרשום את $2c^2+2b^2-a^2$ על ידי x,y,z. נקבל:

$$2(x+y)^2+2(x+z)^2-(y+z)^2=4x^2+y^2+z^2+4xz+4xy-2yz=$$
$$=(y-z)^2+4x(x+y+z)=(y-z)^2+4xp$$

כאשר $p=x+y+z$. לפי אי-שוויון קושי-שוורץ,

$$\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}\cdot\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}=\sqrt{(y-z)^2+4xp}\cdot\sqrt{(x-z)^2+4yp}\geq$$
$$\geq(y-z)(x-z)+4p\sqrt{xy}$$

לכן $$LHS\geq\sum_{cyc}\frac{(x-y)(x-z)+4p\sqrt{yz}}{(x+y)(x+z)}$$

(כאן ובעוד מקומות LHS זה קיצור של left hand side, או האגף השמאלי, זאת דרך להתייחס לאגף השמאלי בלי להעתיק אותו). מספיק להוכיח שהביטוי החדש גדול או שווה ל-9. על מנת להיפתר משורשים נחליף $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt{y}$, $w=\sqrt{z}$ ונקבל שצריך להוכיח את $\sum_{cyc}\frac{(u^2-v^2)(u^2-w^2)+4(u^2+v^2+w^2)vw}{(u^2+v^2)(u^2+w^2)}\geq 9$.

נכפיל הכול במחנה ונפתח סוגריים (כן, אנחנו לא מפחדים לפתוח סוגריים).

$$\sum_{cyc}\left((u^2-v^2)(u^2-w^2)+4(u^2+v^2+w^2)vw\right)(v^2+w^2)\geq 9(v^2+w^2)(u^2+v^2)(u^2+w^2)$$

אבל $(u^2-v^2)(u^2-w^2)=(u^2+v^2)(u^2+w^2)-2(v^2+w^2)u^2$, לכן אפשר לצמצם ויישאר

$$\sum_{cyc}\left(-2(v^2+w^2)u^2+4(u^2+v^2+w^2)vw\right)(v^2+w^2)\geq 6(v^2+w^2)(u^2+v^2)(u^2+w^2)$$

$$4\sum_{cyc}\left(u^2v^2+u^2w^2+v^4+2v^2w^2+w^4\right)vw\ge 6\left(2u^2v^2w^2+\sum_{sym}u^4v^2\right)+2\sum_{cyc}\left(v^4w^2+2u^2v^2w^2+w^4v^2\right)$$

$$8\sum_{cyc}u^3v^3+4\sum_{sym}u^3v^2w+4\sum_{sym}u^5v\ge 24u^2v^2w^2+8\sum_{sym}u^4v^2$$

נחלק ב-4 ונקבל $2\sum_{cyc}u^3v^3+\sum_{sym}u^3v^2w+\sum_{sym}u^5v\ge 6u^2v^2w^2+2\sum_{sym}u^4v^2$

אי-שוויון זה מתפרק לסכום של אי-שוויונים פשוטים יחסית: $\sum_{sym}u^3v^2w\ge 6u^2v^2w^2$ (זה אי-שוויון הממוצעים: סכום של 6 מחוברים גדול או שווה ל-6 כפול הממוצע ההנדסי שלהם, ועוד סכום של 3 אי-שוויונים שאחד מהם הוא $2u^3v^3+u^5v+v^5u\ge 2\left(u^4v^2+v^4u^2\right)$, ושני האחרים מתקבלים ממנו על ידי החלפת שמות של אותיות.

על מנת להוכיח את האי-שוויון שנשאר, נעביר את הכול לאגף השמאלי, נחלק ב-uv, ונקבל $2u^2v^2+u^4+v^4-2\left(u^3v+v^3u\right)\ge 0$. נחלק ב-$u^4$, ונסמן $s=\frac{v}{u}$. יתקבל פולינום ב-s מדרגה רביעית: $s^4-2s^3+2s^2-2s+1\ge 0$.

לא קשה לנחש שפולינום זה מתחלק ב-$s-1$, הרי סכום במקדמים אפס, ואם האי-שוויון נכון אז השורש ב-1 חייב להיות שורש כפול, לכן הפולינום אמור להתחלק ב-$(s-1)^2$.

מכאן קל לנחש את הנוסחה $s^4-2s^3+2s^2-2s+1=(s-1)^2\left(s^2+1\right)$.

וזה כמובן ביטוי חיובי.

פתרון שני. נוכיח משפט כללי יותר.

משפט. צלעות משולש הם a,b,c, ומרחקים מנקודה X במישור לקודקודיו הם p,q,r (לקודקודים שנמצאות מול הצלעות a,b,c בהתאמה, כלומר a,b,r נפגשות בנקודה אחת וכו'). אזי $\boxed{abc\le aqr+bpr+cpq}$.

למשל אם ניקח נקודת מפגש התיכונים שמרחקים ממנה לקודקודים הם $\frac{2}{3}m_a,\frac{2}{3}m_b,\frac{2}{3}m_c$, נקבל אי-שוויון $abc\le\sum_{cyc}\frac{4}{9}am_bm_c$. נחלק את שני האגפים ב-$\frac{4}{9}abc$ ונקבל את הטענה.

נשאר להוכיח את המשפט בשביל להשלים את פתרון השאלה.

הוכחת המשפט. נשתמש במספרים מרוכבים, ונניח לה"כ ש-X היא ראשית, וקודקודי המשולש הם מספרים מרוכבים A,B,C.

אזי $abc=|A-B|\cdot|B-C|\cdot|C-A|=\left|(A-B)\cdot(B-C)\cdot(C-A)\right|$.

וגם $pqc=|B-A|\cdot|A|\cdot|B|=\left|A\cdot B\cdot(B-A)\right|$, ובאופן דומה נתין לקבל את המחוברים האחרים.

כעת נשתמש בזהות $(A-B)\cdot(B-C)\cdot(C-A)=\sum_{cyc}AB(B-A)$.

זהות זאת נכונה גם למספרים מרוכבים, וקל להוכיח אותה על ידי פתיחת סוגריים.

ניקח את ערך המוחלט לשני האגפים ונשתמש באי-שוויון המשולש:

$$\left|(A-B)\cdot(B-C)\cdot(C-A)\right|=\left|\sum_{cyc}AB(B-A)\right|\le\sum_{cyc}\left|AB(B-A)\right|$$

מש"ל.