תרגיל 8

1. עבור $x,y,z>0$ הוכח כי

א. $\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}}\geq\sqrt{x+y+z}$.

ב. $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}$.

ג.** $\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}}\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{2}}$.

2. a,b מספרים חיוביים. הוכח כי

א. $\left(a^a\cdot b^b\right)^{\frac{1}{a+b}}\geq\frac{a+b}{2}$.

ב. $\left(a^a\cdot b^b\right)^{\frac{2}{a+b}}\geq\frac{a^2+b^2}{2}$.

3. עבור $x,y,z\geq 0$ הוכח כי $\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\leq\frac{1}{8}$.

4. א. הוכח את ההכללה של משפט פיתגורס: סכום ריבועי האלכסונים במקבילית שווה לסכום ריבועי צלעותיה. הסק מכאן את הנוסחה לאורך התיכון באמצעות אורכי צלעות המשולש.

ב. יהי a,b,c צלעות המשולש, m_a,m_b,m_c תיכוניו (m_a הוא תיכון ל-a וכדומה). הוכח כי

$$\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

ג*. בסימונים של הסעיף הקודם, הוכח כי $\frac{m_am_b}{ab}+\frac{m_bm_c}{bc}+\frac{m_cm_a}{ca}\geq\frac{9}{4}$.