תרגיל 7

1. א. מרובע ABCD חסום במעגל. הוכח כי אם E נמצאת על אותו מעגל, אז מכפלת המרחקים מ-E לישרים AB, CD שווה למכפלת המרחקים מ-E לישרים BC, AD, ושווה למכפלת המרחקים מ-E לישרים AC, BD.
ב. הכלל את הטענה שניסחנו למרובע למקרה של משושה.

א. פתרון ראשון (חשבון זוויות). לה"כ E נמצאת על קשט AD. יהיו K, L, M, N עקבי האנכים מ-E ל-AB, BC, CD, DA בהתאמה. אז מספיק להוכיח כי משולש ELK דומה למשולש EMN, אז EM / EN = EL / EK, מש"ל.
את דמיון המשולשים אפשר להוכיח על ידי חשבון זוויות פשוט, שאתם מוזמנים לעשות אותו. יש בציור זה מספר רב של מעגלים: המעגל ABCDE, המעגל שקוטרו EB והוא עובר דרך נקודות K, L, ועוד מעגלים מסוג זה, וכאשר יש מעגלים אז לא קשה לעשות חשבון זוויות.

פתרון שני. נזכר בנוסחה לשטח באמצעות צלעות ורדיוס במעגל החוסם: $S = \frac{abc}{4R}$.
לכן $\frac{BC\cdot h_{BC}}{2}\cdot\frac{AD\cdot h_{AD}}{2} = S_{EBC}\cdot S_{EDA} = \frac{EB\cdot EC\cdot BC}{4R}\cdot\frac{ED\cdot EA\cdot AD}{4R}$, כאשר h_{BC}, h_{AD} הם אורכי הגבהים מ-E על BC, AD בהתאמה.
מנוסחה זאת מתקבל לאחר צמצום: $h_{BC}\cdot h_{AD} = \frac{EA\cdot EB\cdot EC\cdot ED}{4R^2}$.
אבל אפשר לכתוב נוסחה דומה עבור $h_{CD}\cdot h_{AB}$ מאותם שיקולים.

ב. הכללה: נתונות $2N$ נקודות שונות על המעגל, ונקודה נוספת E על אותו מעגל. נחלק את הנקודות לזוגות בדרך אקראית. לכל שתי נקודות של אותו זוג נעביר ישר שעובר דרכן. הטענה היא שמכפלת המרחקים מ-E לכל הישרים לא תלויה בחלוקה לזוגות.

קל להוכיח את הטענה בשיטה של הפתרון השני.

2. מרובע חסום במעגל ואלכסוניו מאונכות. הוכח כי:
א. ישר שעובר דרך נקודת חיתוך האלכסונים שלו ומאונך לצלע מסוימת חייב לחלק את הצלע הנגדית לשני חלקים שווים.
ב. מרחק ממרכז המעגל החוסם לכל צלע שווה למחצית מהצלע הנגדית.
ג. סכום ריבועי הצלעות שווה ל-8 פעמים הריבוע של רדיוס.

פתרון. נכניס סימונים: המרובע הוא ABCD, נקודת חיתוך האלכסונים היא X, ומרכז המעגל החוסם O. נניח כי XM הוא תיכון של BAX, ו-XT גובה של CDX.

א. חשבון זוויות: M מרכז המעגל החוסם של BAX ולכן הזווית MXB שווה לזווית MBX והיא בעצם זווית ABD. שהיא שווה לזווית ACD. והיא משלימה את הזווית XDC ל-90°, כלומר שווה ל-XDH.

ובכן, זוויות BXM, DXH שוות ולכן MXH ישר אחד.

ב. תהי E נקודה נגדית לנקודה C על המעגל החוסם, אז O אמצע BC.
גם BD וגם AE מאונכים ל-AC, לכן הם מקבילים. לכן הקוטר של המעגל שמאונך ל-BD מאונך גם ל-AE. סימטריה ביחס לקוטר מחליפה בין A ל-E, ובין B ל-D. לכן AB שווה ל-DE.
במשולש CDE האנך מ-O על CD הוא קטע אמצעים לכן הוא שווה למחצית DE ולכן גם למחצית AB. מש"ל.

ג. נשתמש באותה סימטריה של סעיף הקודם. במשולש CDE הצלע CE היא קוטר ולכן הזווית D ישרה. לכן $AB^2 + CD^2 = DE^2 + CD^2 = CE^2 = (2R)^2 = 4R^2$.
באופן דומה $BC^2 + AD^2 = 4R^2$.
סכום של שתי משוואות אחרונות נותן מש"ל.

3. ABCD מרובע חסום. הישרים AB, CD נחתכים ב-P, הישרים AD, BC נחתכים ב-Q, הישרים AC, BD נחתכים ב-T. הוכח כי נקודת חיתוך הגבהים של משולש PQT זה המרכז של המעגל החוסם של ABCD.

פתרון. נסמן את מרכז המעגל ב-O. צריך להוכיח כי PT מאונך ל-QO. באופן סימטרי מתקבל גם ש-QT מאונך ל-PO. לא צריך להוכיח בנפרד ש-PQ מאונך ל-QO, כי גבהים בכל משולש נפגשים.
יהיו PE, PF שני המשיקים מ-P למעגל (E, F נקודות השקה).

טענה. T, Q, E, F נמצאים על ישר אחד.

מהטענה הכול מתקבל, הרי זה די ברור ש-EF מאונך ל-OP.

הוכחת הטענה. נבצע הטלה מרכזית. בהטלה מרכזית יש ישר שעובר לאינסוף, את הישר נבחר כך שהוא יעבור דרך P אבל לא יגע במעגל.
אז המעגל יהפוך לאליפסה, ו-P יעלם, לכן AB, CD, המשיק ב-E, המשיק ב-F מקבילים. נבצע בנוסף העתקה ליניארית שתהפוך את האליפסה למעגל. הישרים עדיין יהיו מקבילים. לאחר שתי ההעתקות, יחסית לישר EF יש סימטריה בין A ל-B, ובין C ל-D. לכן יחסית ל-EF נקודת חיתוך של AC עם BD, ושל AD ו-BC. לכן Q, T נמצאים על EF. לכן כך היה גם לפני ההעתקה.

4. מרובע שצלעותיו a,b,c,d חסום במעגל שרדיוסו R. הוכח כי שטח המרובע $S = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4R}$.

פתרון. נסמן את האלכסונים של המרובע e, f. אם ניקח משולש שצלעותיו a,b,e, נחתוך אותו ונדביק אותו הפוך, לפי אלכסון e, אז נקבל מרובע שחסום באותו מעגל וצלעותיו

a,b,d,c בסדר זה, ואלכסוניו e,g. אם נחתוך לפי אלכסון g ונדביק הפוך אז נקבל מרובע שחסום באותו מעגל וצלעותיו a,d,b,c, ואלכסוניו f,g.

לפי משפט פתולמאוס בשלוש מרובעים האלה נקבל:

$$,ab+cd=ef \qquad ,ac+bd=eg \qquad ,ab+cd=ef$$

לכן הנוסחה שצריך להוכיח היא $S=\frac{efg}{4R}$.

כידוע, אם האלכסונים של מצולע הם e,f וזווית בין האלכסונים ψ אז השטח הוא

$$S=\frac{ef\cdot\sin\psi}{2}.$$

נניח שבמעגל שלנו זווית בין אלכסון לצלע α נשענת על מיתר a, וזווית γ נשענת על מיתר c. אנחנו משאירים בתור תרגיל לקוראים

(1) $,\psi=\alpha+\gamma$

(2) $,g=2R\sin\psi$

(3) זה מסיים את הפתרון.

5. מרובע שצלעותיו a,b,c,d חסום במעגל שרדיוסו R. באמצעות a,b,c,d רשום את התנאי לכך שהזווית בין האלכסונים היא 60°.

פתרון. שוב, נחתוך לפי אלכסון ונדביק מחדש לאורך האלכסון בכיוון הפוך. נקבל מרובע שצלעותיו בסדר זה הן a,c,b,d. במרובע החדש הזווית בין a,c היא 60° וזווית בין b,d היא 120°, או להפך. לכן אם נרשום שני משפטי קוסינוס נקבל אותו דבר:

$$a^2+c^2\pm ac=b^2+d^2\mp bd$$

לכן נרכז את הדברים עם סימן מתחלף בצד שמאל, ואת הדברים עם סימן קבוע בצד ימין

$$\pm\left(ac+bd\right)=b^2+d^2-a^2-c^2$$

ולכן התנאי הוא $ac+bd=\left|b^2+d^2-a^2-c^2\right|$.