תרגיל 6

1. יוסי בוחר מספר טבעי אקראי מ-1 עד 10. מיכל בוחרת מספר טבעי אקראי מ-1 עד 11 (לכל מספר אפשרי יש אותו סיכוי, הבחירות הן בלתי תלויות). מה הסיכוי שהמספר של מיכל גדול יותר מהמספר של יוסי?

פתרון. נסתכל על זוגות מספרים (M,Y), כאלה שיוסי יכול לבחור את Y ומיכל יכולה לבחור את M. נסתכל לכל זוג גם על זוג $(12-M,11-Y)$. קל לראות שלכל זוג טוב (שבו המספר של מיכל גדול מהמספר של יוסי) מתאים זוג לא טוב. לכן יש כמות זהה של זוגות טובים ולא טובים. לכן הסיכוי שווה $\frac{1}{2}$.

2. נתון מספר N טבעי.
א. לפחות עבור חצי מהמחלקים d של N, למשוואה $x^2 = d \pmod 7$ יש פתרון.
ב. האם בהכרח לפחות עבור שליש מהמחלקים d של N, למשוואה $x^3 = d \pmod 7$ יש פתרון? אם כן, מדוע? אם לא, האם אפשר להחליף את שליש במספר יותר קטן כך שהטענה תהיה נכונה?

פתרון. נרשום פירוק לגורמים ראשוניים $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_s^{n_s}$, כאשר $p_1, p_2, ..., p_s$ מספרים ראשוניים שונים, $n_1, ..., n_s$ מספרים טבעיים. כל המחלקים של N הם מהצורה $d = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_s^{m_s}$, כאשר $m_k \le n_k$ הוא מספר שלם אי-שלילי.

א. מודולו 7, המשוואה $x^2 = a \pmod 7$ פתירה עבור $a = 1,2,4,0$ ולא פתירה עבור $a = 3,5,6$. אם 7 הוא p_k, מחלק ראשוני של N, אז כל מחלק שמכיל אותו מקיים את התנאי. ברור שכמות המחלקים כאלה היא לפחות $\frac{n_k - 1}{n_k}$, כלומר לפחות $\frac{1}{2}$.
נניח מעכשיו ש-7 לא נמצא ברשימה של מחלקים ראשוניים. אז השאריות שיצאו מודולו 7 הם 1,2,4 (שאריות ריבועיות) או 3,5,6 (שאריות לא ריבעיות). נשים לב כי מכפלה של שני שאריות תצא לא ריבועית אם בדיוק אחד מהם אינו ריבועי.
לכן, אם p_k נותן שארית ריבועית, אז דרגה שלו m_k לא משפיעה על סוג של d (ריבועי או לא) מודולו 7. אבל אם p_k שארית לא ריבועית, אז שינוי של m_k ב-1 תשנה גם את הסוג של d.
זה נותן לנו רעיון לבניית התאמה. נניח כי p_k מספר לא ריבועי מודולו 7, ו-n_k אי-זוגי. אז ניקח התאמה כזאת על המחלקים של N: אם m_k אי-זוגי, אז נקטין אותו ב-1, ואם הוא זוגי, נגדיל אותו ב-1. כך כל המחלקים חולקו לזוגות מסוגים הפוכים, ולכן יש בדיוק חצי מכל סוג. לכן אם יש מחלק לא ריבועי בחזקה אי-זוגית, סיימנו.

נניח כי כל מחלק p_k לא ריבועי נמצא ב-N בחזקה זוגית. אז ההתאמה שבנינו לא תעבוד, אבל אפשר לבנות התאמה על המחלקים של N שמכילים את p_k בחזקה חיובית. התאמה כזאת: אם אם m_k אי-זוגי, אז נקטין אותו ב-1, ואם הוא אי-זוגי, נגדיל אותו ב-1.
אז מבין המחלקים שמכילים את p_k בחזקה חיובית יש אותה כמות משני הסוגים, לכן מספיק להוכיח את הטענה למחלקים שלא מתחלקים ב-p_k. בצורה כזאת עברנו מ-N ל-$\frac{N}{p_k^{n_k}}$, כלומר צמצמנו את כמות המחלקים הראשוניים.
ובכן, אם יש לנו מחלק ראשוני לא ריבועי מודולו 7, אז או שאנחנו מסיימים את ההוכחה ישר (כאשר חזקה שלו אי-זוגית) או שאפשר להיפתר ממנו. לכן מספיק להוכיח למקרה שבו כל המחלקים הראשוניים הם ריבועים מודולו 7. אבל אז כל המחלקים של N הם ריבועים מודולו 7, והכל ברור.

ב. המקרה שבו 7 נמצא ברשימת המחלקים הראשוניים הוא פשוט, לכן לא נדבר עליו.
אם אין כזה מחלק, אז כל השאריות שנקבל הם 1,2,3,4,5,6.
מתוכם רק 1,6 הם חזקות שלישיות. קל לבדוק כי .

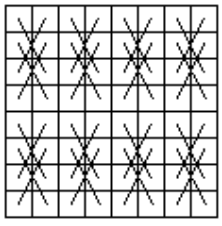
3. א. פיצה מחולקת ל-p "משולשים" שווים (כאשר p ראשוני), ועל כל משולש אפשר לשים אחת מ-a תוספות. כמה פיצות שונות אפשר לייצר? (פיצות שנבדלות רק בסיבוב נחשבות לשקולות).
ב. p ראשוני אי-זוגי. כמה תתי-קבוצות יש בקבוצה $\{1,2,3,...,2p\}$ שסכום איבריהם מתחלק ב-p ?

א. תשובה: $\frac{a^p-a}{p}+a$.
פתרון: כמות הפיצות שאפשר לייצר בלי להתחשב בסיבובים היא a^p. ביניהן יש כל מיני פיצות שקולות. אם על פיצה כלשהי כל המשולשים עם אותה תוספת, היא לא משתנה כשמסובבים אותה. כאלה יש a פיצות. אם פיצה כלשהי מכילה לפחות 2 תוספות, אז יש בדיוק p פיצות שמתקבלות ממנה ע"י סיבוב. זה נותן עוד $\frac{a^p-a}{p}$ פיצות, עד כדי סיבוב.
סה"כ $\frac{a^p-a}{p}+a$ פיצות שונות.
ולמה לפיצות עם 2 תוספות שונות ומעלה, יש בדיוק p פיצות השקולות לה? נסמן ב-k את גודל הסיבוב המינימאלי (ביחידות של $2\pi/p$) שיש לבצע כדי לחזור לאותה הפיצה. אם $k=1$ אז כל הסיבובים של הפיצה זהים, אבל זה לא ייתכן כי יש עליה לפחות 2 תוספות. כמו כן, אם k לא מחלק של p אז אם r שארית החלוקה של p ב-k, גם אחרי סיבוב בגודל r נחזור לאותה פיצה, בסתירה למינימאליות של k. לכן בהכרח k מחלק של p ומכיוון ו-p ראשוני, $p=k$.

ב. תשובה: $\frac{4^p-4}{p}+4$.

פתרון: הרעיון דומה – נאמר שקבוצה היא טובה עם סכום איבריה מתחלק ב- p . נתבונן בפעולה הבאה על תת-קבוצות: להוסיף 1 לכל איברי הקבוצה מודולו 2p. אם בקבוצה m איברים, כל פעולה כזו מוסיפה לסכום הקבוצה בדיוק m . נניח ש- m זר ל- p . לאחר $2p$ פעולות נחזור לקבוצה המקורית. יהי k מספר פעולות מזערי עבורו נחזור לאותה קבוצה, אזי k מחלק את $2p$ כלומר שייך ל- $\{1,2,p,2p\}$. קל להראות ש- k שונה 1 ו- 2. לאחר k פעולות נקבל בדיוק k/p קבוצות טובות. כלומר $1/p$ מהן טובות. לכן בדיוק $\frac{1}{p}$ מהקבוצות טובות (מגודל זר ל- p). יש $4^p-\binom{2p}{p}-2$ קבוצות שגודלן זר ל- p. לכן מביניהן יש בדיוק $\frac{1}{p}\left(4^p-\binom{2p}{p}-2\right)$ קבוצות טובות. נותר לספור כמה קבוצות טובות יש מגודל $0,p,2p$. יש קבוצה טובה אחת עם 0 איברים ואחת עם $2p$ איברים. כמה קבוצות טובות יש עם p איברים? את זה נפתור שוב בעזרת מסלולים:
נחלק את הקבוצה $\{1,....,2p\}$ ל-2 חלקים: $\{1,...,2p\}=\{1,...,p\}\cup\{p+1,...,2p\}$. הפעולה תהיה להוסיף 1 מודולו p לכל איברי הקבוצה שב- $\{1,...,p\}$.
נחלק למקרים: אם כל p האיברים בחלק הראשון נקבל קבוצה טובה אחת. כנ"ל לגבי החלק השני. אחרת, מבין כל p קבוצות שהתקבלו כך ע"י הפעולה, יש בדיוק אחת טובה. סה"כ נקבל 2 קבוצות טובות מהסוג הראשון, ועוד 1 מכל p קבוצות מהסוג השני. קבוצות מהסוג השני יש: $\binom{2p}{p}-2$, ואחת מכל p טובה, לכן נקבל כך בסה"כ $\frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p}-2\right)+2$.
נסכם הכול ונקבל: $\frac{1}{p}\left(4^p-\binom{2p}{p}-2\right)+2+\frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p}-2\right)+2=\frac{4^p-4}{p}+4$.
הערה: התשובה זהה לכמות הפיצות עם p משולשים ו-4 טעמים. האם ניתן להראות ישר שהבעיות שקולות?

4. שניים משחקים במשחק הבא. הראשון עושה מהלך ראשון- מציב פרש על לוח שחמט (הלוח היה ריק מקודם). אחרי זה שני השחקנים מעבירים את הפרש בתורות, לפי חוקי שחמט. אסור להעביר פרש למשבצת שבה הוא כבר היה לפני זה. השחקן שלא מסוגל לעשות מהלך בתורו מפסיד. לאיזה מהשחקנים יש אסטרטגיה מנצחת?



תשובה: לשחקן השני.
פתרון. השחקן השני יחלק את משבצות הלוח (מחשבתית) לזוגות, כך שכל שני משבצות באותו זוג מקושרות ע"י מהלך של פרש (יש הרבה דרכים לעשות את זה, למשל כמו בציור). כל פעם שהראשון מציב פרש במשבצת מסוימת, השני מעביר פרש למשבצת השנייה של אותו זוג. כך, בכל רגע אחרי מהלך של שני (ברור באינדוקציה) פרש ביקר בחלק מהזוגות בשתי המשבצות ובאף משבצת של זוגות אחרים. לכן הראשון נאלץ להעביר פרש למשבצת שהוא לא היה לא בה ולא בבת הזוג שלה, ולכן השני יכול להמשיך באסטרטגיה שלו כל עוד שהראשון הצליח לעשות מהלך. לכן הראשון הוא זה שלא יהיה מסוגל לעשות מהלך ברגע מסוים.

5. נזכיר כי תמורה של n מספרים זו פונקציה חח"ע ועל מקבוצה $\{1,2,...,n\}$ לעצמה. לכל תמורה σ של n מספרים, נגדיר $N(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}|i-\sigma_i|$. הראה שלכל $k\geq 2n$ מספר התמורות σ של n מספרים עבורם $N(\sigma)=k$ הינו זוגי.

פתרון. עבור σ הפרמוטציה של n אברים נגיד שזוג (a,b) טוב אם $a,b\leq\sigma_b,\sigma_a$. נקרא לפרמוטציה טובה אם יש לה זוג טוג טוב. נשים לב כי אז פרמוטציה $\tilde{\sigma}$ שזהה ל- σ פרט ל - $\tilde{\sigma}_b=\sigma_a,\tilde{\sigma}_a=\sigma_b$, מקיימת $N(\sigma)=N(\tilde{\sigma})$.
נגדיר יחס סדר על זוגות (a,b): נגיד ש - $(a,b)\prec(c,d)$ אם $min\{a,b\}\prec min\{c,d\}$ או אם מתקיימים $min\{a,b\}=min\{c,d\}$ ו- $max\{a,b\}\prec max\{c,d\}$.
תכונה שחשוב לזכור: $b\prec c\Leftrightarrow(a,b)\prec(a,c)$.
עכשיו נגדיר פעולה על פרמוטציה טובה σ: נגדיר σ^* כך – יהי (a,b) זוג מזערי של σ אז יהי σ^* זהה ל- σ עבור לכל איבר פרט ל-b ו- a שעבורם $\sigma^*_a=\sigma_b$ ו- $\sigma^*_b=\sigma_a$. כמובן $N(\sigma)=N(\sigma^*)$. נראה ש- $\sigma\neq\sigma^*$ (ובבירור $\sigma=\sigma^{**}$).
יהי (a,b) זוג טוב מזערי של σ אזי נדרש ומספיק להוכיח ש- (a,b) זוג מזערי של σ^*.
אם זוג (c,d) (שונה מי (a,b)) זוג טוב של σ^* ושל σ אז $(c,d)\succ(a,b)$ בגלל מזעריות של (a,b). אם (c,d) זוג טוב ב-σ^* ולא ב- σ אז $\sigma^*_c\neq\sigma_c$ (לה"כ) וזה גורר $a=c$ (לה"כ). כיוון ש-$(c,d)=(a,d)$ אינו טוב ב- σ והינו טוב ב- σ^* מתקיים $\sigma^*_a\geq d\succ\sigma_a$ אבל $b\leq\sigma_a$ (כי (a,b) טוב) כלומר $d\succ b$ ולכן $(c,d)=(a,d)\succ(a,b)$. ולכן (a,b) זוג טוב מזערי ב- σ^*.
כך הראנו שפרמוטציות טובות בעלי $N(\sigma)=k$ ניתן לפצל לזוגות זרות (σ,σ^*), כלומר מספרן זוגי.
נראה שעבור σ פרמוטציה לא טובה $N(\sigma)\prec 2n$, וזה מסיים את ההוכחה.
נסמן $\sigma_1=m$. נתבונן ב- $1\prec i\leq m$: זוג $(1,i)$ אינו טוב ו-$\sigma_1\prec i$ וזה גורר כי $\sigma_i\prec i$ וזה גורר את $\sigma_i=i-1$. כלומר קבענו את $\sigma_1,..,\sigma_m$. נשים לב ש-$\sum_{i=1}^{m}|i-\sigma_i|-2(m-1)$.
קבלנו סוג של בלוק שמתחיל ב-1. ועכשיו אפשר להפעיל אותו שיקול עבור $m+1$ במקום 1...
אפשר להמשיך כנ"ל ולקבל $N(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}|i\quad\sigma_i|=2(n\quad l)$. כאשר l זה מספר בלוקים. כלומר $N(\sigma)\prec 2n$. מש"ל.

הערה: למעשה ניתן לחשב את זוגיות גם עבור $k\prec 2n$.