תרגיל 6

תרגיל זה עוסק בהתאמות. התאמה היא דרך להוכיח, ששתי קבוצות הן מאותה עוצמה מבלי לספור את איבריהם. למשל אם יש קבוצה גדולה של אנשים, וקבוצה גדולה של כיסאות, וכל אחד יושב על כיסה כך שאין כיסאות פנויים, זאת אומרת שכמות האנשים שווה לכמות הכיסאות.

1. יוסי בוחר מספר טבעי אקראי מ-1 עד 10. מיכל בוחרת מספר טבעי אקראי מ-1 עד 11 (לכל מספר אפשרי יש אותו סיכוי, הבחירות הן בלתי תלויות). מה הסיכוי שהמספר של מיכל גדול יותר מהמספר של יוסי?

2. נתון מספר N טבעי.
א. לפחות עבור חצי מהמחלקים d של N, למשוואה $x^2 = d \pmod 7$ יש פתרון.
ב. האם בהכרח לפחות עבור שליש מהמחלקים d של N, למשוואה $x^3 = d \pmod 7$ יש פתרון? אם כן, מדוע? אם לא, האם אפשר להחליף את שליש במספר יותר קטן כך שהטענה תהיה נכונה?

3. א. פיצה מחולקת ל-p "משולשים" שווים (כאשר p ראשוני), ועל כל משולש אפשר לשים אחת מ-a תוספות. כמה פיצות שונות אפשר לייצר? (פיצות שנבדלות רק בסיבוב נחשבות לשקולות).
ב. p ראשוני אי-זוגי. כמה תתי-קבוצות יש בקבוצה $\{1,2,3,...,2p\}$ שסכום איבריהם מתחלק ב-p ?

4. שניים משחקים במשחק הבא. הראשון עושה מהלך ראשון- מציב פרש על לוח שחמט (הלוח היה ריק מקודם). אחרי זה שני השחקנים מעבירים את הפרש בתורות, לפי חוקי שחמט. אסור להעביר פרש למשבצת שבה הוא כבר היה לפני זה. השחקן שלא מסוגל לעשות מהלך בתורו מפסיד. לאיזה מהשחקנים יש אסטרטגיה מנצחת?

5. נזכיר כי תמורה של n מספרים זו פונקציה חח"ע ועל מקבוצה $\{1,2,...,n\}$ לעצמה. לכל תמורה σ של n מספרים, נגדיר $N(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\left|i-\sigma(i)\right|$. הראה שלכל $k \geq 2n$ מספר התמורות σ של n מספרים עבורם $N(\sigma)=k$ הינו זוגי.