תרגיל 5

1. הוכח כי $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^3$.

פתרון. נבדוק את סכום כל המקדמים. זה אותו דבר כמו להציב $a=b=c=1$.
בצד שמאל נקבל $3+3\cdot 8=3\cdot 9=27$. בצד ימין נקבל 27, וזה אותו דבר.
אנחנו רואים שבשני האגפים יש ביטויים סימטריים מדרגה 3 ב-a,b,c. מצד שמאל a^3 מופיע פעם אחד, וגם מצד ימין. אותו דבר ל-b^3,c^3.
ביטויים מסוג a^2b יופיע ב-$(a+b)(b+c)(c+a)$ פעם אחד, לכן באגף שמאלי הוא מופיע עם מקדם 3. גם באגף ימני הוא יופיע עם מקדם 3. אכן, אם רוצים לקבל אותו בפתיחת סוגריים $(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$, צריך לבחור גורם אחד מבין השלושה שבהם ניקח את b ובגורמים האחרים ניקח את a בדרך יחידה.
ובכן, המקדמים של a^2b בשני האגפים הם אותו דבר. המקדמים של כל הצורות הסימטריות שלו כמו $a^2c,c^2b,...$ יסתדרו באופן סימטרי.
נשאר לבדוק גם את המקדם של abc הרי מקדמים של כל המונומים האחרים מדרגה 3 כבר בדקנו. אבל בעצם אין צורך לבדוק. הרי בדקנו בהתחלה שסכום כל המקדמים בשני האגפים הוא זהה, לכן אם בדקנו את כל המקדמים חוץ מאחד, אז גם המקדם של המונום האחרון מסתדר.

2. א. הוכח כי $\frac{a(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(k-a)(k-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}=k$ כאשר a,b,c,k מספרים ממשיים שונים.
ב. הכלל את הזהות של סעיף א' לכמות יותר גדולה של אותיות.

פתרון. גם בצד ימין וגם בצד שמאל יש פולינומים ב-k, מדרגה שלא עולה על 2.

אפשר לדעת ששני פולינומים מדרגה שלא עולה על d שווים עם בודקים שיש להם אותו ערך ב-$d+1$ נקודות שונות. אכן, אם נחסיר את שני הפולינומים נקבל פולינום מדרגה שלא עולה על d שמתאפס באותן $d+1$ נקודות. זה לא יתכן אם הפולינום הוא לא 0 זהותי (הרי לפולינום מדרגה n יכולים להיות לכל היותר n שורשים).

ובכן, בשביל ההוכחה מספיק למצוא 3 נקודות שבהן שני האגפים שווים. עם נציב $k=a$ או $k=b$ או $k=c$ הכול יצטמצם ונקבל שוויון. מש"ל.

ב. $\sum_{i=0}^{n}k\prod_{j\neq i}\frac{k-a_i}{a_j-a_i}=k$. ההוכחה די דומה לסעיף הקודם.

3. בתוך טבלה ריבועית 3×3 רשומים מספרים (בשורה ראשונה a, b, c בשורה שנייה d,e,f בשורה שלישית g, h, i בסדר הנתון). ידוע שהריבוע הוא ריבוע קסם: כלומר, סכום המספרים בכל שורה, בכל עמודה ובכל אלכסון שווה לאותו מספר. הוכח כי:

א. $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$
ב. $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4\cdot e^3$.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

פתרון.
נסמן ב- K את הסכום של 3 מספרים בשורה כלשהי,
עמודה כלשהי, או אלכסון כלשהו.

א.

$$(a+b+c) + (c+f+i) + (i+h+g) + (g+d+a) = 4K = 2(b+e+h) + 2(d+e+f)$$
$$2(a+c+i+g) + (b+f+h+d) = 2(b+h+d+f) + 4e$$
$$2(a+c+i+g) = b+d+f+h + 4e$$

ב. כדי לחסוך כתיבה:
את זהות של סעיף א' נסמן (A) ,
את הזהות של סעיף ב' נסמן (C),
ואת הזהות $2(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) = b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4\cdot e^2$ נסמן (B).
נפרק את ההוכחה ל-5 שלבים:
טענה 1. בכל ריבוע קסם $3e = K$.
טענה 2. המספרים a,b,c,d,e,f,g,h,i יוצרים ריבוע קסם אם ורק אם המספרים a+s, b+s, c+s, d+s, e+s, f+s, g+s, h+s, i+s יוצרים ריבוע קסם (במילים אחרות, אם נוסיף לכל המספרים בריבוע קסם אותו מספר אז זה עדיין יהיה ריבוע קסם).
טענה 3. עבור ריבוע קסם כזה ש- $e = 0$ (המספר שבמרכז), מתקיים (B).
טענה 4. עבור ריבוע קסם כלשהו, מתקיים (B).
טענה 5. עבור ריבוע קסם כזה ש- $e = 0$ (המספר שבמרכז), מתקיים (C).
טענה 6. עבור ריבוע קסם כלשהו, מתקיים (C).

כלומר הטענה האחרונה היא מה שצריך להוכיח בסוף.
הוכחת טענה 1.

$$3K = (a+e+i) + (c+e+g) + (b+e+h) = 3e + (a+b+c) + (g+h+i) = 3e+2K$$

הוכחת טענה 2. סכום בכל שורה, עמודה או אלכסון יגדל ב-3s ולכן הוא יישאר זהה לכל משבצות של הטבלא.

הוכחת טענה 5. אם $e = 0$, אז לפי טענה 1 שכבר הוכחנו, $K=0$. לכן סכום של כל 2 מספרים מנוגדים בטבלא אפס, כלומר $i = -a$, $g = -c$, $b = -h$, $d = -f$ ולכן
$2(a^3 + i^3 + c^3 + g^3) = 2\cdot(0 + 0) = 0 + 0 + 0 = b^3 + h^3 + d^3 + f^3 + 4\cdot e^3$

הוכחת טענה 3. כבר הסברנו בהוכחת טענה 5 לפני רגע מספר תכונות של ריבוע כזה: $e = 0$, וראינו גם $K = -f$, $d = -h$, $b = -c$, $\mathbf{g = -c}$, $\mathbf{i = -a}$
בנוסף $a + b + c = 0$, לכן $\mathbf{b = -a - c}$, ולכן $\mathbf{h = a + c}$.
וגם $a + d - c = a + d + g = 0$ לכן $\mathbf{d = c - a}$.
ולכן $\mathbf{f = a - c}$ וכך קיבלנו את כל המספרים של הריבוע כביטוים של a, c.
נציב את הביטויים האלה במשוואה:

$$2(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) = b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4\cdot e^2$$
$$2(a^2 + c^2 + (-c)^2 + (-a)^2) = (-a-c)^2 + (c-a)^2 + (a-c)^2 + (a+c)^2 + 4\cdot 0^2$$

$$4(a^2 + c^2) = 2(c - a)^2 + 2(a + c)^2$$

וזה ברור.

הוכחת טענה 4. מספיק להוכיח שאם עבור ריבוע קסם a,b,c,d,e,f,g,h,i מתקיים (B) אז עבור a+s, b+s, c+s, d+s, e+s, f+s, g+s, h+s, i+s גם תתקיים זהות דומה ל-B.

היות וכל ריבוע קסם אפשר לקבל ע"י הוספה של e = s לכל המספרים של ריבוע קסם אחר שבמרכז שלו רשום 0, ועבור ריבוע קסם כזה כבר הוכחנו את הזהות (B), אז מכאן נקבל את הזהות (B) לריבוע קסם כלשהו.

ובכן, צריך בהסתמך על זהות (B) לקבל

$$2((a+s)^2 + (c+s)^2 + (g+s)^2 + (i+s)^2) = (b+s)^2 + (d+s)^2 + (f+s)^2 + (h+s)^2 + 4\cdot(e+s)^2$$

נפתח סוגריים, ואז הזהות שנקבל היא סכום של 3 זהויות:

$$2(s^2 + s^2 + s^2 + s^2) = s^2 + s^2 + s^2 + s^2 + 4\cdot s^2$$
$$2\cdot 2(as + cs + gs + is) = 2(bs + ds + fs + hs + 4\cdot es)$$
$$2(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) = b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4\cdot e^2$$

כל 3 הזהויות נכונות. הראשונה היא ברורה לגמרי, השנייה היא הזהות (A) שהוכחנו בסעיף א' לכל ריבוע קסם כפול 2s, והשלישית היא זהות (B) עבור ריבוע מקורי שעליה אנו מסתמכים. מש"ל.

הוכחת טענה 6. מספיק להוכיח שאם עבור ריבוע קסם a,b,c,d,e,f,g,h,i מתקיים (C) אז עבור a+s, b+s, c+s, d+s, e+s, f+s, g+s, h+s, i+s גם תתקיים זהות דומה ל-(C).

לפי טענה 5 מזה נקבל את הכל בדרך דומה למה שעשינו בטענה 4 (הרי וכל ריבוע קסם אפשר לקבל ע"י הוספה של s לכל המספרים של ריבוע קסם אחר שעבורו קבר הוכחנו את (C), ואז מקבלים את (C) לריבוע קסם כלשהו).

ובכן, צריך בהסתמך על זהות (C) לקבל

$$2((a+s)^3 + (c+s)^3 + (g+s)^3 + (i+s)^3) = (b+s)^3 + (d+s)^3 + (f+s)^3 + (h+s)^3 + 4\cdot(e+s)^3$$

נפתח סוגריים, ואז הזהות שנקבל היא סכום של 3 זהויות:

$$2(s^3 + s^3 + s^3 + s^3) = s^3 + s^3 + s^3 + s^3 + 4\cdot s^3$$
$$3\cdot 2(as^2 + cs^2 + gs^2 + is^2) = 3(bs^2 + ds^2 + fs^2 + hs^2 + 4\cdot es^2)$$
$$3\cdot 2(a^2s + c^2s + g^2s + i^2s) = 3(b^2s + d^2s + f^2s + h^2s + 4\cdot e^2s)$$
$$2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4\cdot e^3$$

כל 4 הזהויות נכונות.

הראשונה היא ברורה לגמרי,

השנייה היא הזהות (A) שהוכחנו בסעיף א' לכל ריבוע קסם, כפול $3s^2$, והשלישית היא זהות (B) שהוכחנו בטענה 4 לכל ריבוע קסם, כפול 3s,

והאחרונה היא זהות (C) עבור ריבוע מקורי שעליה אנו מסתמכים. מש"ל.

4. יהיה $p(x)$ פולינום בעל מקדמים שלמים. נתבונן במספר

$$p\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + p\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) + p\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + p\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

האם המספר הזה הוא בהכרח שלם? האם הוא בהכרח רציונלי?

תשובות. כן וכן.

תזכורת. בשביל פתרון של שאלה זאת ושאלה הבאה אנחנו נשתמש בזהויות ניוטון.

ניקח פולינום

$$p(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\sigma_3x^{n-3}+\ldots\pm\sigma_n\ ,$$

כאשר σ_k זה פולינומים סימטריים אלמנטריים (סכומי מכפלות של כל k מספרים שונים מבין $x_1,\ldots,x_k$). נגדיר עוד משפחה של פולינומים סימטריים $s_k=x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k$.

זהויות ניוטון אלה זהויות שמקשרות בין s_k לבין σ_k.

הרעיון הוא לחבר את הביטויים $x_j^k p(x_j)$. הביטוים האלה מתאפסים, אבל כאשר נחבר אותם נקבל ביטוי סימטרי. ובכן:

$$0=\sum_{j=1}^{n}x_j^k p(x_j)=\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^{n+k}-\sigma_1x_j^{n+k-1}+\sigma_2x_j^{n+k-2}\ldots\pm\sigma_nx_j^k\right)=s_{n+k}-\sigma_1s_{n+k-1}+\sigma_2s_{n+k-2}\ldots\pm\sigma_ns_k$$

כלומר $\boxed{s_{n+k}-\sigma_1s_{n+k-1}+\sigma_2s_{n+k-2}\ldots\pm\sigma_ns_k=0}$.

במקרה $k=0$ נקבל בשיטה זאת $\boxed{s_n-\sigma_1s_{n-1}+\sigma_2s_{n-2}\ldots\pm n\sigma_n=0}$.

נרשום מספר זהויות ראשונות

$$\boxed{\begin{aligned}&s_1-\sigma_1=0\\&s_2-s_1\sigma_1+2\sigma_2=0\\&s_3-s_2\sigma_1+s_1\sigma_2-3\sigma_3=0\\&s_4-s_3\sigma_1+s_2\sigma_2-s_1\sigma_3+4\sigma_4=0\end{aligned}}$$

נשים לב שגם אם הוכחנו זהות מספר n מ עבור n משתנים, אפשר להגדיל את כמות המשתנים $x_1,x_2,x_3,\ldots$ בכל זהות, כי בכל מונום בזהות מספר n יש רק n משתנים, לכן אם כל המקדמים בזהות מסתדרים עבור n משתנים אז גם עבור כמות יותר גדולה של משתנים.

פתרון של שאלה 4. נשים לב שהמספרים $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$ מקיימים את המשוואה $\left(x^2-2\right)^2-2=0$.

הם שונים, לכן הם כל השורשים של פולינום מתוקן בעל מקדמים שלמים (פולינום מתוקן זה פולינום שמקדם המוביל שלו = 1).

מזהויות ניוטון רואים ישר כי $s_1=\sigma_1$ שלם וגם ש-s_k אם כל ה-s_i הקודמים לו שלמים. לכן $s_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k+x_4^k$ שלם לפי אינדוקציה. לכן גם לכל פולינום $p(x)=\sum a_kx^k$ בעל מקדמים שלמים $p(x_1)+p(x_2)+p(x_3)+p(x_4)=\sum a_ks_k$ וזה שלם, מש"ל.

.

5. מספרים ממשיים x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 שונים מ-0 ומקיימים: $\sum_{i=1}^{5}x_i=0$, ובנוסף $\sum_{i=1}^{5}x_i^2=2$.

הוכח כי $\sum_{i=1}^{5}x_i^4+4\left(\prod_{i=1}^{5}x_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}=2$.

פתרון. נשים לב כי: $\left(\prod_{i=1}^{5} x_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}=\sigma_4$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = s_4$. לכן מה שמבקשים זה טענה כזאת: אם עבור 5 מספרים $s_2 = 2$, $s_1 = 0$ אז צ"ל ש-$s_4 + 4\sigma_4 = 2$.

ידוע: $s_2 = 2$, $s_1 = 0$. מזהות ניוטון הראשונה: $\sigma_1 = s_1 = 0$.

מזהות ניוטון השנייה: $s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$ כלומר $2 + 2\sigma_2 = 0$ כלומר $\sigma_2 = -1$.

מזהות ניוטון הרביעית: $s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_3 + 4\sigma_4 = 0$.

במקרה שלנו $s_4 - 2 + 4\sigma_4 = 0$. מש"ל.