תרגיל 5

1. הוכח כי $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^3$.

2. א. הוכח כי $\frac{a(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(k-a)(k-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}=k$ כאשר a,b,c,k מספרים ממשיים שונים.

ב. הכלל את הזהות של סעיף א' לכמות יותר גדולה של אותיות.

3. בתוך טבלה ריבועית 3×3 רשומים מספרים (בשורה ראשונה a, b, c בשורה שנייה d,e,f בשורה שלישית g, h, i בסדר הנתון). ידוע שהריבוע הוא ריבוע קסם: כלומר, סכום המספרים בכל שורה, בכל עמודה ובכל אלכסון שווה לאותו מספר. הוכח כי:

א. $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$

ב. $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4\cdot e^3$.

4. יהיה $p(x)$ פולינום בעל מקדמים שלמים. נתבונן במספר

$$p\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+p\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)+p\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+p\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

האם המספר הזה הוא בהכרח שלם? האם הוא בהכרח רציונלי?

5. מספרים ממשיים x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 שונים מ-0 ומקיימים: $\sum_{i=1}^{5}x_i=0$, ובנוסף $\sum_{i=1}^{5}x_i^2=2$.

הוכח כי $\sum_{i=1}^{5}x_i^4+4\left(\prod_{i=1}^{5}x_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}=2$.