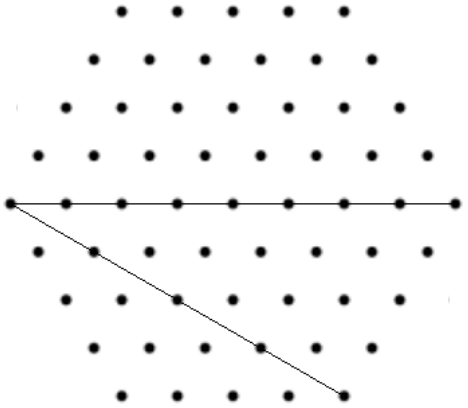
תרגיל 4

1. A היא קבוצה בת 60 נקודות במישור. B היא קבוצה של כל המספרים שמייצגים את המרחקים בין שתי נקודות שונות של A. האם מספר האיברים ב-B יכול להיות:
א. פחות מ-50?
ב. פחות מ-25?

א. למשל מצולע משוכלל בעל 60 קודקודים – יש לו רק 30 מרחקים.

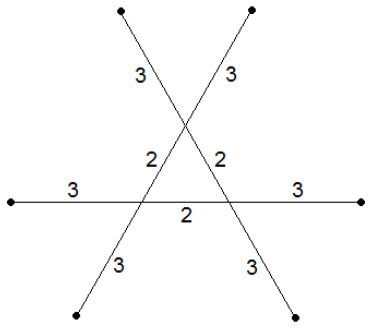
דוגמה אחרת: מצולע משוכל בעל 59 קודקודים והמרכז שלו.



דוגמה שלישית: מרכזי כל המשבצות חוץ מהפינות של לוח שח.
כמה מרחקים שונים יש שם?

ב. כן. ניקח רשת שנוצרת ממשולשים משוכללים באותו גודל. בציור מופיע חלק מהרשת הזאת , של 61 נקודות. הרבה מרחקים בין זוגות של נקודות בציור חוזרים על עצמם. ננסה לחשב כמה מרחקים שונים יש. קודם כל כל קטע שמחבר שתי נקודות אפשר להזיז באופן מקביל לאחד הצדדים, עד שאחד מהקודקודים יהיה בקודקוד של המשושה, נניח שזה הקודקוד השמאלי. התמונה סימטרית ביחס לאלכסון האופקי הארוך של משושה, לכן מספיק להתבונן בנקודות שנמצאות לא מעל האלכסון הזה. נעביר גם אלכסון שמחבר את הקודקוד השמאלי לקודקוד ימני תחתון של המשושה. אם הנקודה השנייה נמצאת מתחת לאלכסון זה, אז אפשר לשקף אותה יחסית לאלכסון. אנחנו מגיעים למצב שקודקוד אחד הוא הקודקוד השמאלי, והשני נמצא בין האלכסונים שציירנו או עליהם. סה"כ לנקודה השנייה יש 24 מצבים, לכן יש לו יותר מאשר 24 מרחקים שונים בקבוצה זו (שיש בה אפילו 61 משבצות).
בעצם יש רק 23 מרחקים, אבל זה כבר לא מתקבל משיקולי סימטריה אלה מהתכונות של משולש מאוד מיוחד שצלעותיו 3, 5, 7 שעליו נדבר גם בפתרונות של שאלות הבאות.

2. האם אפשר לסמן 6 נקודות שונות במישור, כך שאף שלוש מהן לא על ישר אחד והמרחק בין כל שתיים יהיה מספר שלם שקטן מ-9 ?



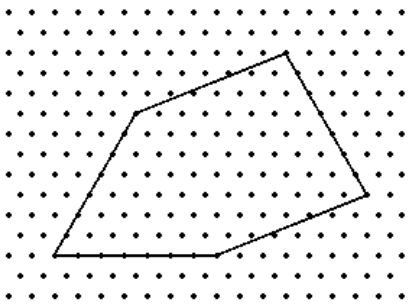
תשובה: כן.
בציור מסומנות 6 נקודות. הם נבנו בצורה כזאת.
לוקחים משולש שווה צלעות שצלעותיו שוות 2.
ממשיכים כל צלע בשני הכיוונים במרחק 3.
אז לוקחים את הקצוות של ההמשכים.
מתקבל משושה. הקודקודים הנגדיים שלו נמצאים במרחק 8 זה מזה. הקודקודים השכנים במרחק 3 או

5 זה מזה (בגלל משולשים שווי צלעות). זוגות קודקודים האחרים נמצאים במרחק של 7 (במשולש שאורכי צלעותיו 3, 5, 7 הזוויות מול הצלע 7 שווה 120° בגלל משפט קוסינוסים: $7^2 = 3^2 + 3\cdot 5 + 5^2$.)

3. האם אפשר למצוא במישור מחומש קמור, שכל צלעותיו שוות, וקודקודיו – נקודות שלמות (כלומר קואורדינאטות של קודקודיו הם מספרים שלמים)?
הזהרה: כידוע מחומש שווה-צלעות לא חייב להיות משוכלל.

תשובה. לא.
פתרון. ניקח מחומש בעל צלע קטנה ביותר a שמקיים את זה (עם קיים מחומש כזה אז קיים גם מחומש בעל צלע קטנה ביותר, הרי אורך הצלע תמיד שורש של מספר טבעי).
נישאל את עצמינו שאלה: האם a^2 זוגי או אי-זוגי?
לווקטור של כל צלע יש קואורדינאטות שלמות. סכום ריבועי הקואורדינאטות שלו שווה לריבוע אורך הצלע. לכן אם שני הקצוות של צלע הם אותו דבר מבחינת צביעת שחמט, אז a^2 זוגי, ואם הם שונים מבחינת צביעת שחמט אז a^2 אי-זוגי.
לא יכול להיות שכל שני קודקודים עוקבים במחומש נמצאים בצבעים הפוכים של צביעת שחמט, כי 5 אי-זוגי. לכן a^2 זוגי, וכל קודקודי המחומש נמצאים על נקודות זוגיות או על כולם אי-זוגיות מבחינת סכום הקואורדינאטות. לכן אפשר להקטין את המחומש פי $\sqrt{2}$ ולסובב אותו ב- 45° כך שעדיין אחרי זה קודקודיו יהיו שלמים. זה יהיה מחומש יותר קטן מאשר המחומש המקורי, בסתירה להנחה.

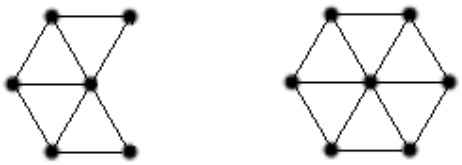
4*. האם אפשר למצוא במרחב תלת-מימדי מחומש מישורי שווה-צלעות וקמור, שכל קודקודיו – נקודות שלמות?



פתרון. כן. ניקח מישור $\{x+y+z=0\}$. נקודות שלמות בו יוצרים סריג משולשי. כעת קל לבנות מחומש אם נשתמש שוב בתכונות של המשולש שצלעותיו 3, 5, 7 (ראה ציור).

שאלה נוספת לקוראים: מה אם מצולע שווה-צלעות בעל 5773 קודקודים?

5*. א. הוכח שמתוך 21 זוגות שיש מבין 7 נקודות, אותו מרחק בין הנקודות יכול להופיע רק ב-12 זוגות שונות.
ב. מה המספר המרבי של זוגות מתוך 6 נקודות, שבהן יכול להופיע אותו מרחק?



פתרון. א. נניח שעבור נקודות $A_1,...,A_7$ במרחקים מהם לנקודות אחרות המרחק a מופיע $n_1,n_2,...,n_7$ פעמים בהתאמה, כאשר $n_1 \ge n_2 \ge ... \ge n_7$ (אחרת נחליף שמות לנקודות).

טענה. $n_1+n_2\le 9$

הוכחת הטענה. המרחק בין הנקודות A_1,A_2 יכול להיות a ואז הוא נספר פעמיים. יכולות להיות רק 2 נקודות שנמצאות במרחק a גם מ-A_1 וגם מ-A_2. שתי נקודות האלה תורמות 4 ל-n_1+n_2. כל אחת מהנקודות האחרות יכולה לתרום רק 1 ל-n_1+n_2, לכן בסה"כ נקבל $n_1+n_2\le 2+2+2+1+1+1=9$.

קל לראות שבין הנקודות A_1,A_2,A_3,A_4 יש שתי נקודות A_i,A_j שהמרחק בינם שונה מ-a. אם נפעיל את השיקולים של הטענה הקודמת לזוג הזה של נקודות נקבל כי $n_i+n_j\le 7$. לכן $n_4\le n_j\le 3$, ולכן גם $n_5,n_6,n_7\le 3$.

אבל אם $n_i+n_j\le 7$ עבור $1\le i,j\le 4$ שונים, אז.

$$n_1+n_2+n_3+n_4=\left(n_i+n_j\right)+\left(n_k+n_l\right)\le\left(n_i+n_j\right)+\left(n_1+n_2\right)\le 7+9$$

$$n_1+\ldots+n_7\le 7+9+n_5+n_6+n_7\le 16+3+3+3=25$$

אבל בסכום $n_1+\ldots+n_7$ כל מרחקי a נספרים פעמיים. לכן אם מסמן ב-N את כמות המרחקים ששווים ל-a, נקבל $2N\le 25$, מש"ל.

ב. תשובה: 9.

פתרון. דוגמה הופיע בציור בעמוד הקודם. הוכחה דומה מאוד לסעיף הקודם: $n_1+n_2\le 8$, וגם $n_1+n_2+n_3+n_4\le 8+6$, וגם $n_5,n_6\le 3$ ולכן

$$2N\le n_1+\ldots+n_6\le 8+6+3+3\le 2\cdot 10.$$

אבל בשביל שיתקיים שוויון $N=10$ צריך שיתקיימו $n_i=n_j=n_5=n_6=3$ כאשר $i,j\le 4$ שונים, לכן $n_3=n_4=n_5=n_6=3$, ובנוסף גם $n_1+n_2=8$. זה משאיר שתי אפשרויות: או $n_1=n_2=4$, או ש-$n_1=5,n_2=3$.

את שתי האפשרויות קל לפסול באופן גיאומטרי. אם $n_1=5$, זאת אומרת ש-$A_2,\ldots,A_5$ נמצאות על מעגל שרדיוסו a, ולכל אחת מהנקודות האלה חוץ מ-A_1 יש עוד שתי נקודות במרחק a, וזה לא מתאפשר (אם צועדים על מעגל בצעד כזה שאורך המיתר שווה לרדיוס, זה לא נסגר אחרי 5 פעמים).

האפשרות של 4,4,3,3,3,3 גם לא קשה לפסול באמצעות ניתוח גיאומטרי בבדיקה של מספר קטן של מקרים. נקודות A_1,A_2 נמצאות במרחק a זו מזו, וכל הנקודות האחרות נמצאות על מעגלים שמרכזיהם A_1,A_2 ורדיוסיהם a. אנחנו חייבים לקחת את שני נקודות החיתוך של המעגלים (נסמן אותם A_3,A_4), ועוד שתי נקודות, אחת על כל מעגל, שאחת מהן נמצאת במרחק a מ-A_3 והשנייה נמצאת במרחק a מ-A_4. זה קובע את התמונה ביחידות עד כדי סימטריה, ובתמונה זאת ל-A_5 יש רק שני מרחקים באורך a.