תרגיל 3

1. לוקחים מספר דו-ספרתי (למשל 78) ורושמים אותו 3 פעמים ברצף. מקבלים מספר 6 ספרתי (למשל 787878). הוכח\י שהמספר שמתקבל מתחלק ב-111.

פתרון. בעצם מספיק לבדוק כי 10101. אכן $10101=111(100-10+1)$.

2. הכלל\י את הטענה למספרים בשיטות ספירה עם בסיס שונה מ-10 (בד"כ משתמשים בשיטת ספירה עשרונית, שבנויות על כך שכל מספר אפשר לפרק לסכום של חזקות של 10, אבל אפשר להשתמש במקום 10 בכל מספר טבעי N שגדול מ-1, ואז נצטרך להשתמש ב-N ספרות). הוכח שבכל בסיס ספירה המספר *ababab* מתחלק ב-111.

פתרון. צריך לבדוק אץ הזהות $10101=111(100-10+1)$ גם בבסיס N.

בעצם זה אומר $\boxed{N^4+N^2+1=(N^2+N+1)(N^2-N+1)}$. זה מתקבל מפתיחת סוגריים:

$$(N^2+N+1)(N^2-N+1)=(N^2+1)^2-N^2=N^4+2N^2+1-N^2=N^4+N^2+1$$

3. הוכח\י שהתכונה של שאלה 1 מתקיימת לא רק למספרים דו-ספרתיים, אלה גם למספרים 4 ספרתיים. האם היא מתקיימת למספרים 5-ספרתיים, שרושמים אותם שלוש פעמים? לאיזה K התכונה הזאת תתקיים עבור מספרים K-ספרתיים, שאם נרשום אותם 3 פעמים, נקבל בהכרח מספר שמתחלק ב-111?

פתרון. עבור 4 מספיק לבדוק כי 100010001 מתחלק ב-111. אבל לפי הזהות הממוסגרת מפתרון השאלה הקודמת, 100010001 מתחלק ב-10101 שמתחלק ב-111.

עבור מספרים שלוש ספרתיים, התשובה תלויה בשאלה הבאה: האם 1001001 מתחלק ב-111? אם כן, אז מספר abcabcabc מתחלק ב-111. אם לא, אז אם נבחר מספר abc שזר ל-111 אז גם $\text{abcabcabc}=\text{abc}\cdot 1001001$ זר ל-111, למשל 110110110 מתאים אם 1001001 זר ל-111.
ובכן,1000 שווה 1 מודולו 111, לכן 1001001 שווה 3 מודולו 111, לכן הוא לא מתחלק ב-3.

עכשיו לשאלה כללית יותר לגבי מספרים K-ספרתיים. התשובה תלויה בדבר הבא: האם $10^{2K}+10^K+1$ מתחלק ב-111?
אם K מתחלק ב-3, אז 10^K שווה 1 מודולו 111, ולכן $10^{2K}+10^K+1$ שווה 3 מודולו 111, ואז הטענה לא מתקיימת.
באופן דומה קל לבדוק שאם K לא מתחלק ב-3, אז 10^K שווה 10 או 100 מודולו 111, ואז 10^{2K} שווה 100 או 10 מודולו 111, ואז $10^{2K}+10^K+1$ שווה 111 מודולו 111, כלומר מתחלק ב-111.
ובכן, הטענה מתקיימת לכל K שלא מתחלק ב-3.

4. הוכח שאם רושמים מספר כלשהו בין 1 ל-5772 חמש פעמים ברצף, נקבל מספר שמתחלק ב-11111.
האם תכונה זאת מיוחדת לבסיס ספירה עשרוני או שזה מתקיים בכל בסיס ספירה?

פתרון. מספר בין 1 ל-5772 יכול להיות חד-ספרתי, דו-ספרתי, תלת-ספרתי או 4-ספרתי. לכן מספיק לבדוק כי 101010101, 1001001001001, $1+10^4+10^8+10^{12}+10^{16}$ מתחלקים ב-11111.
אבל 10^5 שווה ל-1 מודולו 11111. לכן 10^{5D+R} שווה 10^R מודולו 11111. השאלה שלנו היא: לאיזה K המספר $1+10^K+10^{2K}+10^{3K}+10^{4K}$. וזה תלוי רק בשאריות של $K, 2K, 3K, 4K$ מודולו 5. יש שני אפשרויות:
א. K מתחלק ב-5 ואז $1+10^K+10^{2K}+10^{3K}+10^{4K}$ שווה ל-5 מודולו 11111.
ב. K לא מתחלק ב-5, ואז $1, K, 2K, 3K, 4K$ שווים מודולו 5 ל-1, 2, 3, 4, 5 בסדר כלשהו, ואז $1+10^K+10^{2K}+10^{3K}+10^{4K}$ שווה ל-11111 ושווה ל-0 מודולו 11111.

באיזה תכונה של 10 אנחנו משתמשים? אם נחליף 10 במספר טבעי N, נצטרך לבדוק לכל K האם המספר $1+N^K+N^{2K}+N^{3K}+N^{4K}$ מתחלק ב-$1+N+N^2+N^3+N^4=C$.

אפשר לפתור את השאלה בשני דרכים: אפשר לעשות את מה שעשינו בבסיס עשרוני בבסיס אחר, ובכל בסיס 10^5 שווה ל-1 מודולו 11111, לכן עבור K שלא מתחלק ב-5 מתקבלת התחלקות של $1+10^K+10^{2K}+10^{3K}+10^{4K}$ ב-11111. עבור K שמתחלק ב-5, נקבל כי $1+10^K+10^{2K}+10^{3K}+10^{4K}$ שווה ל-1+1+1+1+1 מודולו C וזה קטן ממש מ-C, לכן זה לא מתחלק ב-C.

דרך אחרת לפתור את השאלה היא להשתמש בפולינומים, ואת זה נראה בפתרון של שאלה האחרונה.

5*. נבחר מספרים טבעיים K ו-M. הוכח שהמשפט הבא מתקיים אך ורק כאשר K ו-M זרים, כלומר אין להם מחלקים משותפים פרט ל-1:

משפט. לכל $N > 1$ טבעי, בהנחה שהמספרים נרשמים בבסיס N, אז אם נרשום מספר K-ספרתי כלשהו M פעמים ברצף נקבל מספר MK ספרתי שבהכרח מתחלק במספר M-ספרתי שמורכב מאחדים.

הוכח\י שאם ל-K ו-M יש מחלק משותף, אז המשפט יכול להתקיים רק למספר סופי של ערכי N.

פתרון. ניקח שני פולינומים $p(x)$, $q(x)$. אנחנו נגיד ש-p מתחלק ב-q אם קיים פולינום $r(x)$ כזה ש-$p(x) = q(x)r(x)$. ההגדרה הזאת תלויה בשאלה, על איזה סוג של פולינומים מדובר: האם מדובר על פולינומים עם מקדמים מרוכבים, ממשיים, רציונליים, שלמים (או בלשון מדעית מעל איזה שדה או חוג מוגדרים הפולינומים?)
למשל פולינום x^2 מתחלק בפולינום $2x$ מעל מספרים ממשיים, אבל לא מעל מספרים שלמים. העניין הוא שאפילו ש-$r(x)$ קיים, יכול להיות שהמקדמים שלו לא שלמים.

קיימות שתי דרכים לבדוק, האם פולינום $p(x)$ מתחלק בפולינום $q(x)$.

דרך ראשונה היא לחלק אם שארית. חלוקה אם שארית היא שיטה כללית אלגברית, שתלויה רק במקדמי הפולינום ולא בשדה (נזכיר ששדה זה קבוצת מספרים שמוגדרים עליה 4 פעולות חשבון, עם התכונות הטבעיות שמזכירות את התכונות של מספרים ממשיים). לכן אם המקדמים של פולינומים שייכים גם לשדה F וגם לשדה G אז אם הפולינום מתחלק בפולינום שני מעל שדה F אז הם מתחלקים גם מעל שדה G.
לכן אם מתקיימת התחלקות של פולינומים בעלי מקדמים שלמים מעל מספרים מרוכבים, אז מתקבלת התחלקות של אותם פולינומים מעל מספרים ממשיים ואפילו מעל רציונליים.

כמו שראינו אי-אפשר לנסח טענה דומה לפולינומים בעלי מקדמים שלמים באותה צורה, אבל מסתבר שאפשר לנסח אותה עבור פולינום מתוקן.

הגדרה. פולינום מתוקן זה פולינום, שהמקדם המוביל שלו שווה 1.

ובכן, אנחנו טוענים שאם $p(x)$, $q(x)$ פולינומים בעלי מקדמים שלמים, ובנוסף $q(x)$ מתוקן, אז $p(x)$ מתחלק ב-$q(x)$ בתור פולינום בעל מקדמים שלמים אם ורק אם הוא מתחלק בתור פולינום מעל מקדמים מרוכבים (בדוגמה הנגדית שראינו קודם q לא היה מתוקן). רואים את זה מכך שבחלוקה עם שארית בפולינום מתוקן אין צורך להשתמש בפעולת החילוק. ההוכחה היא תרגיל לקוראים.

מכאן מתקבלת הדרך השנייה לבדוק עבור פולינומים בעלי מקדמים שלמים $p(x)$, $q(x)$, כאשר q מתוקן, האם p מתחלק ב-q: צריך לבדוק האם כל השורשים המרוכבים של q הם גם שורשים מרוכבים של p, והאם הריבויים שלהם ב-p לא קטנים יותר.
בשביל בדיקה זו חייבים להשתמש במספרים מרוכבים, הרי במספרים מרוכבים לכל פולינום יש שורש, ובמספרים שלמים\רציונליים\ממשיים לא תמיד.

נניח ש-$p(x)$, $q(x)$ הם פולינומים בעלי מקדמים שלמים ו-q מתוקן. במקרה זה אפשר לחלק את p ב-q עם שארית: $p(x) = a(x)q(x) + b(x)$, כאשר פולינומים a, b גם הם בעלי מקדמים שלמים ודרגה של b קטנה ממש מדרגה של q.
אז אם b מתאפס, נקבל ש-$p(N)$ מתחלק ב-$q(N)$ לכל N שלם.
אם b הוא לא פולינום אפסי, אז $0 < |b(N)| < |q(N)|$ כאשר $|N|$ מספיק גדול. לכן $p(N)$ יכול להתחלק ב-$q(N)$ רק עבור מספר סופי של ערכי N.

אחרי כל הסיפורים הכלליים על פולינומים (שכדאי לדעת אותם בכל מקרה), נחזור לשאלה המקורית. שואלים אותנו, האם המספר $1 + N^K + N^{2K} +\ldots+ N^{(M-1)K}$ מתחלק במספר $1 + N + N^2 +\ldots+ N^{(M-1)}$. אפשר לענות על שאלה זו בשני דרכים. דרך אחת היא לעשות חלוקה עם שארית כמו שעשינו קודם. דרך שנייה היא כזאת: נבדוק האם הפולינום $p(x) = 1 + x^K + \ldots + x^{(M-1)K}$ מתחלק ב-$q(x) = 1 + x + x^2 +\ldots+ x^{(M-1)}$.
אם כן, אז גם המספרים מתחלקים, אם לא, אז המספרים לא מתחלקים פרט למספר סופי של N. בשביל זה מספיק לבדוק את השורשים. שורשי q הם $\operatorname{cis}(k\pi/M)$, עבור $k = 1,\ldots,M-1$, כל אחד עם ריבוי 1, הרי $q(x) = \frac{x^M - 1}{x - 1}$.
נציב את השורשים האלה ל-p. אם M מתחלק ב-K, אז נקבל משהו שונה מ-0, ולכן הפולינומים לא מתחלקים. אם M לא מתחלק ב-M, אז נקבל סדרה הנדסית מרוכבת שהסכום שלה שווה ל-0.