תרגיל 3

1. לוקחים מספר דו-ספרתי (למשל 78) ורושמים אותו 3 פעמים ברצף. מקבלים מספר 6 ספרתי (למשל 787878). הוכח\י שהמספר שמתקבל מתחלק ב-111.

2. הכלל\י את הטענה למספרים בשיטות ספירה עם בסיס שונה מ-10 (בד"כ משתמשים בשיטת ספירה עשרונית, שבנויות על כך שכל מספר אפשר לפרק לסכום של חזקות של 10, אבל אפשר להשתמש במקום 10 בכל מספר טבעי N שגדול מ-1, ואז נצטרך להשתמש ב-N ספרות). הוכח שבכל בסיס ספירה המספר *ababab* מתחלק ב-111.

3. הוכח\י שהתכונה של שאלה 1 מתקיימת לא רק למספרים דו-ספרתיים, אלה גם למספרים 4 ספרתיים. האם היא מתקיימת למספרים 5-ספרתיים, שרושמים אותם שלוש פעמים? לאיזה K התכונה הזאת תתקיים עבור מספרים K-ספרתיים, שאם נרשום אותם 3 פעמים, נקבל בהכרח מספר שמתחלק ב-111?

4. הוכח שאם רושמים מספר כלשהו בין 1 ל-5772 חמש פעמים ברצף, נקבל מספר שמתחלק ב-11111.
האם תכונה זאת מיוחדת לבסיס ספירה עשרוני או שזה מתקיים בכל בסיס ספירה?

5*. נבחר מספרים טבעיים K ו-M. הוכח שהמשפט הבא מתקיים אך ורק כאשר K ו-M זרים, כלומר אין להם מחלקים משותפים פרט ל-1:

משפט. לכל $N > 1$ טבעי, בהנחה שהמספרים נרשמים בבסיס N, אז אם נרשום מספר K-ספרתי כלשהו M פעמים ברצף נקבל מספר MK ספרתי שבהכרח מתחלק במספר M-ספרתי שמורכב מאחדים.

הוכח\י שאם ל-K ו-M יש מחלק משותף, אז המשפט יכול להתקיים רק למספר סופי של ערכי N.