תרגיל 2

1. ABCD הוא דלתון, $AB = AD$, $CB = CD$, הזוויות B ו-D ישרות. נקודות K ו-M נמצאות על הצלעות BC, CD בהתאמה, כך שהזווית MAK, שווה למחצית הזווית BAD. הוכח\י כי $BK + MD = MK$. הוכח\י כי המרחק מ-A לישר MK שווה ל-AB.

פתרון. תהי P נקודה סימטרית ל-B לגבי AK, Q נקודה סימטרית ל-D ביחס ל-AM. אז מחשבון זוויות פשוט רואים כי AP ו-AQ זה אותה קרן. אבל $AP = AB = AD = AQ$, לכן בעצם P זה Q. הזויות APK, AQM ישרות (הרי הן שוות לזוויות B ו-D של הדלתון), ולכן P נמצאת על הישר KM. לכן $KM = KP + QM = BK + MD$. מש"ל.

2. המרחק בין שני ישרים מקבילים k, l שווה לצלע של הריבוע ABCD. הישר l חותך את הצלעות AB, BC (בחלקים הפנימיים של הצלעות ולא בהמשכיהם) בנקודות P, Q בהתאמה. הישר k חותך את הצלעות AD, DC בנקודות S, R בהתאמה.
מהי הזוויות בין PR לבין QS?

פתרון. שיקוף יחסית לישר PR מעביר זוג ישרים AB, DC לזוג ישרים k, l . שיקוף יחסית לישר QS מעביר זוג ישרים k, l לזוג ישרים AD, BC. שילוב של שני שיקופים אלה מסובב זוג ישרים AB, DC לזוג ישרים AD, BC. כלומר זה סיבוב בזווית ישרה.
אבל קל לראות, ששיקוף יחסית לישר PR ואחרי זה יחסית לישר QS מסובב את המישור בזווית 2α, כאשר α היא זווית בין ישרי השיקוף. לכן זווית בין PR ל-QS שווה $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

3. א. במשולש ABC הזווית B ישרה, $AB = BC$. נקודות K, L נמצאות על הצלע AC, כאשר L בין K ל-C. הזווית KBL שווה 45°. הוכח\י כי $AK^2 + LC^2 = KL^2$.
ב. נקודות K, L נמצאות בתוך ריבוע ABCD (לא על צלעותיו) כך שהזוויות KBL, KDL שוות בו-זמנית ל-45°. הוכח\י כי $AK^2 + LC^2 = KL^2$ (בתנאי שנקודות A, K נמצאות בצד אחד של אלכסון BD, נקודות C, L בצד השני של האלכסון).

פתרון. א. נשקף את C ביחס לישר BL ונקבל נקודה S. נשקף את A ביחס לישר BK ונקבל נקודה T. כמו בשאלה הקודמת, מתקבל בקלות שבעצם T זה S.
אבל הזוויות BTK, BSL שוות לזוויות BAC, BCA, כלומר ל-45°. לכן הזווית LSK ישרה, ולכן לפי משפט פיתגורס $AK^2 + LC^2 = SK^2 + LS^2 = KL^2$. מש"ל.

ב. בדומה לסעיף הקודם, אם נשקף את C, A יחסית לישרים BK, BL הם יגיעו לאותה נקודה S (בהנחה ש- K נמצאת בצד של A). צלעות המשולש KLS שוות ל-KL, AK, LC וזווית מול LK שווה לסכום הזוויות KAB, KCB.
אבל באופן דומה היינו יכולים לשקף את A, C יחסית ל-DK, DL. שוב היינו מקבלים משולש KLR עם צלעות באותם אורכים, אבל הפעם הזווית מול KL שווה לסכום הזוויות KAD, KCD. אבל אם צלעות שוות בשני משולשים, אז גם זויות מתאימות שוות.

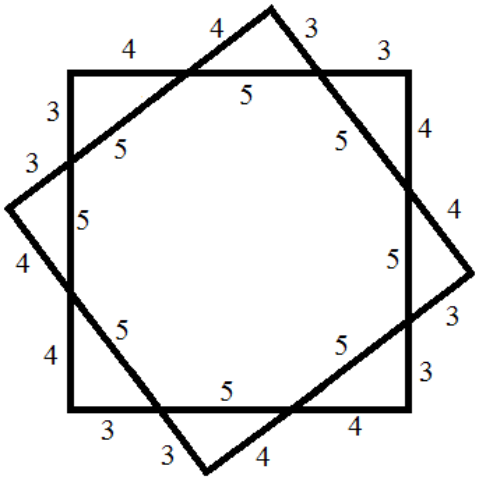
לכן סכום זוויות KCB ,KAB שווה לסכום הזוויות KCD ,KAD. אבל סכום של כל 4 הזוויות שווה 180°, לכן זווית במשולש LSK מול LK שווה 90°, ולכן לפי משפט פיתגורס $AK^2 + LC^2 = SK^2 + LS^2 = KL^2$. מש"ל.

4. במשולש ABC נקודת חיתוך הגבהים היא H, מרכז המעגל החוסם O, ורדיוס המעגל החוסם R. ניקח נקודה כלשהי D על אחת מצלעות המשולש. הוכח כי $OD+HD \geq R$.

פתרון. אם למשולש יש זווית כהה (או ישרה), אז H נמצא מחוץ למעגל חוסם (או עליו) ומכאן $OD+HD \geq OD \geq R$. במקרה של זוויות חדות צריך שיקול עדין יותר.
נוכל להניח ללא הגבלת הכלליות ש-D נמצא על BC. חשבון זוויות פשוט מראה, שסכום הזוויות BAC, BHC הוא 180°. לכן נקודה G שהיא סימטרית ל-H יחסית לצלע BC נמצאת על המעגל החוסם, $OG = R$.
לכן $OD+HD = OD+GD \geq OG = R$.

5*. א. סדרה אינסופית של מספרים ממשיים מקיימת את התנאים הבאים לכל $n > 0$:
$4a_{2n-1} - 5a_{2n} + 3a_{2n+1} = 12$, $3a_{2n} - 5a_{2n+1} + 4a_{2n+2} = 12$. הוכח כי $a_{n+8} = a_n$ לכל n.
ב. סדרה אינסופית של מספרים ממשיים מקיימת את התנאים הבאים לכל $n > 0$:
$5b_{2n-1} - 7b_{2n} + 3b_{2n+1} = 1$, $3b_{2n} - 7b_{2n+1} + 5b_{2n+2} = 1$. הוכח כי $b_{n+12} = b_n$ לכל n.

פתרון. א. נתבונן במשולש מצרי, שצלעותיו $AB = 5, AC = 4, BC = 3$ וזווית שלו C ישרה בגלל משפט פיתגורס. שטח שלו שווה 12. נמשיך את צלעותיו וניקח נקודה P שנמצאת באותו צד של AC כמו B, באותו צד של BC כמו A, אבל מופרדת מ-C על ידי AB. נסמן: מרחק מנקודה P לישרים AC, AB, BC באמצעות d_1, d_2, d_3 בהתאמה.
אז מחישוב שטחים מקבל: $12 = 2S_{ABC} = 2\left(S_{PCA} + S_{PBC} - S_{PAC}\right) = 4d_1 + 3d_3 - 5d_2$.
כמובן שהמרחק תמיד חיובי, אבל אפשר להרחיב את הפונקציות d_1, d_2, d_3 לכל המישור באופן לינארי: בצד הנכון של ישר הפונקציה תסמן מרחק לישר, ובצד ההפוך זה יהיה מינוס מרחק לישר. בתחום שדיברנו עליו קודם מתקיים $12 = 4d_1 + 3d_3 - 5d_2$, לכן בעצם זהות זו מתקיימת על כל המישור, כי בשני האגפים של השוויון נמצאות פונקציות לינאריות (כלומר כאלה שבקואורדינאטות הן $ax + by + c$), לכן אם הן מתלכדות באזור מסוים, הן מתלכדות על כל המישור.



כעת נסתכל על מתומן, שנוצר מחיתון של שני ריבועים, כך שהמשכי כל 3 צלעות עוקבות שלו יוצרות משולש מיצרי, אבל הזוגיים מכוונים בכיוון אחד והאי-זוגיים בכיוון ההפוך. אם ניקח נקודה שמרחקים ממנה לשני צלעות עוקבות של מתומן הן a_1, a_2 (המרחק כאן מכוון: הוא חיובי כאשר נקודה נמצאת באותו צד של ישר כמו מרכז המתומן), אז גם מרחק מהצלע השלישית כמו שראינו הוא a_3, לצלע רביעית המרחק הוא a_4 וכך הלאה, ואז ברור שלמספרים אלה יש מחזור של 8.

הערה. המתומן שציירנו הוא שווה צלעות, אבל לא משוכלל: זוויות זוגיות שלו לא שוות לזוויות האי-זוגיות.

ב. הפתרון של סעיף הקודם היה מבוסס על משולש ישר זווית 3, 4, 5 שכל הזמן משקפים אותו יחסית לחוצי זוויות חיצוניים של זוויות חדות שלו. זה נסגר אחרי 8 שיקופים כי למשולש זווית ישרה.

הפתרון של סעיף הזה דומה, אבל מבוסס על משולש אחר: 3, 5, 7. במשולש הזה הזווית הגדולה היא 120°. משפט קוסינוסים גורר, שלמשולש זווית מול צלע c היא 120° אם ורק אם $c^2 = a^2 + ab + b^2$. הקוראים מוזמנים לבדוק כי $7^2 = 3^2 + 3 \cdot 5 + 5^2$ ולהשלים את ההוכחה בדומה לסעיף הקודם.