<u>תרגיל 1 – אינבריאנטים</u>

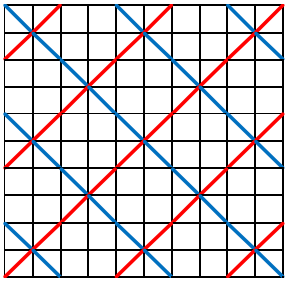
1. במעגל עומדים 44 עצים, ועל כל עץ יושב ציפור אחד. כל דקה שני ציפורים כלשהם עוברים מעצים שעליהם הם נמצאים לעצים סמוכים: ציפור אחד נגד כיוון השעון, השני לפי כיוון השעון. האם יתכן שאחרי זמן-מה כל הציפורים ישבו על אותו עץ?

פתרון. נמספר את העצים מ-0 עד 43. בכל רגע, אנחנו יכולים לשאול את כל הציפורים מה המספר של העץ שבו הוא יושב. סכום המספרים האלה יסומן ב-S. שארית של S בחלוקה ל-44 זה אינווריאנט.
אכן, אם ציפור אחד אף ימינה וציפור אחר אף שמאלה, בדרך כלל גם S לא ישתנה. המספר S עלול להשתנות עם אחד מבין שני הציפורים יעבור מ-עץ 43 ל-0 או להפך, אבל השינוי תמיד יהיה בכפולה של 44.
בהתחלה S הוא סכום המספרים 43+...+2+1+0. שארית החלוקה של המספר ב-44 זה 22. אכן, בסכום זה יש זוגות מספרים שמשלימים זה את זה ל-44, כמו 43+1, וחוץ מהזוגות האלה יש רק 22 ו-0.
אם כל הציפורים יגיעו לעץ מספר K, אז S יהיה שווה 44K, ושארית החלוקה ב-44 תהיה 0 וזה לא אפשרי.

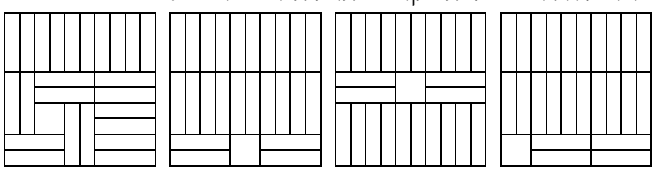
2. א. האם אפשר לרצף חדר 10×10 באמצעות 25 מלבנים 4×1 ?
ב. מרצפים חדר 10×10 באמצעות 24 מלבנים 4×1 וריבוע 2×2.
כמה מיקומים אפשריים יש לריבוע 2×2?
תשובות. א. לא. ב. 13.

3	2	1	0	3	2	1	0	3	2
0	3	2	1	0	3	2	1	0	3
1	0	3	2	1	0	3	2	1	0
2	1	0	3	2	1	0	3	2	1
3	2	1	0	3	2	1	0	3	2
0	3	2	1	0	3	2	1	0	3
1	0	3	2	1	0	3	2	1	0
2	1	0	3	2	1	0	3	2	1
3	2	1	0	3	2	1	0	3	2
0	3	2	1	0	3	2	1	0	3

פתרון. א. נחלק את החדר למשבצות 1×1. נרשום בכל משבצת של שארית החלוקה של מספר שורה פלוס מספר עמודה ב-4. תתקבל טבלא כמו בציור.
אם נצליח לרצף את החדר, אז כל מלבן יהיו מורכב מ-4 משבצות בעלות מספרים שונים.
אבל קל לספור ש-3 מופיע בטבלא 26 פעמים, בזמן ש-1 מופיע רק 24 פעמים. אם היינו מצליחים לרצף, אז היה 25 הופעות של כל ספרה בטבלא. לכן אי-אפשר לרצף.

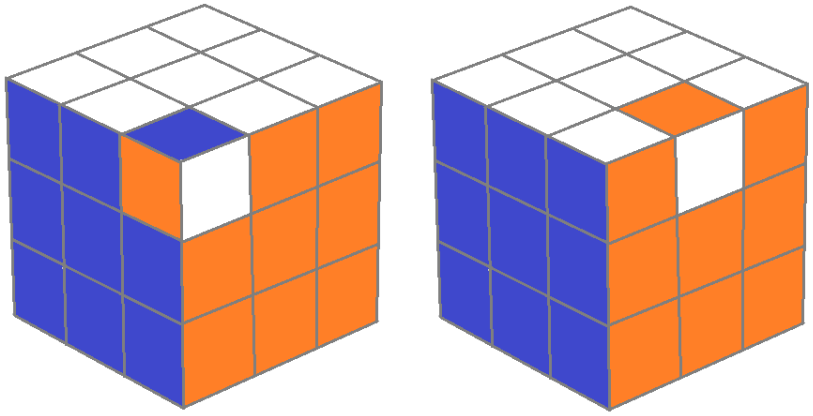


ב. בכל מלבן 4×1 יש הופעה אחת של כל ספרה בטבלא שבנינו בשאלה הקודמת. לכן בריצוף עם ריבוע 2×2 המספר 3 חייב להיות פעמיים. לכן מרכז הריבוע מופיע באחד מאלכסונים הכחולים בציור. באותו אופן (באמצעות טבלה אם מספור סימטרי) מוכיחים שמרכז הריבוע נמצא על אחד האלכסונים האדומים בציור. זה משאיר
לכן מרכז הריבוע נמצא על אחד מבין 13 נקודות החיתוך בין האלכסונים האדומים והכחולים. נשאר לוודא שכל המקרים האלה אפשריים.



בציור רואים דוגמאות עבור 4 מקרים, כל המקרים האחרים סימטריים למקרים אלה.

3. קוביה הונגרית פורקה לחלקים והורכבה מחדש, כך שכל החלקים שכל הקוביות הקטנות שמרכיבות חזרו למקומם, המקורי, וכולם חוץ מחלק אחד נמצאים בכיוונים הנכונים. אחד החלקים, בפינה או באמצע המקצוע, מסובב יחסית למיקום הנכון שלו (כמו בציורים). האם אפשר לפתור את הקובייה בלי לפרק אותה שוב?



תשובה. לא.

פתרון. בכל אחד משני המקרים (כאשר הקובייה המסובבת היא בעלת שלושה צבעים או שני צבעים) צריך להמציא אינווריאנט אחר.

אנחנו נתאר אינווריאנטים ונשאיר לקורא בתור תרגיל לבדוק שהם נשמרים (יהיה קל יותר לעשות את התרגיל הזה בעזרת קובייה הונגרית, אבל אפשר גם בלי אם יש לקורא דמיון גיאומטרי מפותח מספיק).

אינווראינט עבור קוביה של 3 צבעים. נבחר שתי פאות נגדיות: למשל ירוקה וכחולה. נעמיד את הקוביה תמיד כך שריבועים במרכז של פאות בצבעים ירוק וכחול תמיד יהיו כלפי מטה או כלפי מעלה. לכל קובייה תלת-צבעית קטנה נגדיר את מספר הסיבוב שלה בצורה הבאה. נשים לב שלכל קובייה תלת צבעית יש פאה ירוקה או כחולה. אם הפאה הזאת מסתכלת כלפי מעלה או כלפי מטה, נגיד שמספר הסיבוב של קובייה זאת היא 0.

אם בשביל להגיע למצב זה צריך לסובב את הקוביה הקטנה במקום נגד כיוון השעון ב- 120°, נגיד שמספר הסיבוב שלה הוא 1. אם בשביל להגיע למצב זה צריך לסובב את הקוביה הקטנה במקום נגד כיוון השעון ב- 240°, נגיד שמספר הסיבוב שלה הוא 2.

האינווריאנט הוא שארית החלוקה ב-3 של סכום מספרי הסיבוב של כל הקוביות הפינתיות. אנחנו משאירים לקורא לבדוק, שבכל סיבוב מספרי הסיבוב של שתי קוביות עולים ב-1, ושל שתי קוביות אחרות יורדים ב-1.

אינווראינט עבור קוביה של 2 צבעים. נבחר שתי פאות נגדיות: למשל ירוקה וכחולה, ונסמן אותם ב-0. זוג נוסף של פאות נגדיות, קדמית ואחורית, נסמן על ידי 1. עוד זוג של פאות נגדיות, שמאלית וימנית, נסמן ב-2. אז על כל זוג של פאות צמודות אפשר להגדיר כיוון מ-N ל-N+1 (מבחינת שארית החלוקה ב-3). את הכיוון אפשר לבדוק בשתי דרכים: לפי הצבעים של מרכזי הפאות ולפי הצבעים של הקובייה הקטנה שנמצאת באמצע המקצוע. אם הכיוונים האלה מתלכדים, נגיד שהקובייה הקטנה של שני צבעים מכוונת נכון, אחרת נגיד שהיא מכוונת הפוך. אינווריאנט זה זוגיות של כמות הקוביות שמכוונות הפוך.

4. נתונים 4 חרגולים נקודתיים במישור, שנמצאים בהתחלה בקודקודים של הריבוע. מותר בכל דקה לחרגול אחד לקפוץ מנקודה A לנקודה C בתנאי שיש חרגול אחר באמצע הקטע AC. האם החרגולים יכולים בפעולות כאלה להגיע למצבים הבאים:
א. ששלוש מהם יהיו על אותו ישר?
ב. שהם יהיו בקודקודים של ריבוע פי 2 יותר גדול מהריבוע המקורי?
ג. שהם יהיו בקודקודים של ריבוע פי 3 יותר גדול מהריבוע המקורי?

תשובה. לא בכל הסעיפים.
א. נבחר מערכת צירים שבה הצירים הולכים לפי שתי צלעות של ריבוע, ויחידת המדידה שווה לשטח הריבוע. אז החרגולים תמיד יקפצו על נקודות שלמות. קל לראות שזוגיות של כל קואורדינאטה של כל חרגול לא משתנה.
לכן תמיד יהיו לנו 4 חרגולים עם קואורדינטות מ-4 סוגים: (זוגי, זוגי), (אי-זוגי, אי-זוגי), (זוגי, אי-זוגי), (אי-זוגי, זוגי). אבל בכל ישר יכולים להיות רק שתי סוגי נקודות מבחינת זוגיות של קואורדינטות. אכן, אם נקודה שלמה על הישר היא A, ונקודה שלמה הכי קרובה אליה היא A+V, כאשר V הוא ווקטור שלם, אז כל נקודה שלמה אחרת על אותו ישר היא A+nV, כאשר N מספר שלם. לכן מבחינת זוגיות של קואורדינטות בישר זה אפשר לקבל רק שני סוגים של נקודות: A, A+V. לכן לא יכול להיות שיש שלוש חרגולים על אותו ישר.

ב. כמו בסעיף א', חרגולים יהיו על הרשת השלמה וקואורדינאטות שלהן שונות מבחינת זוגיות, לכן בחיים לא יהיו שני חרגולים במרחק של 2.

ג. סעיף זה דווקא לא קשור לחיפוש אינווריאנט, ומבוסס על הרעיון של מהלך הפוך. קפיצות של חרגול הפיכות. לכן אם אפשר לקבל מצב א' ממצב ב' אז אפשר בקפיצות של חרגולים להגיע ממצב ב' למצב א'.
כל ריבוע יוצר רשת. אם נגיע למצב של קודקודי ריבוע פי 3 יוצר גדול, זאת אומרת שאנחנו נמצאים כל הזמן על הרשת שנוצרת מריבוע פי 3 יותר גדול, ובגלל שהכל הפיך זאת אומרת גם שכולם תמיד היו על הרשת הזאת. אבל זה לא נכון: בהתחלה הם לא היו על אף רשת כזאת.

5*. על המעגל נתונות נקודות כחולות ואדומות. מותר להוסיף נקודה אדומה ולשנות את הצבעים של הנקודות השכנות שלה או להסיר נקודה אדומה ולשנות את הצבעים של הנקודות השכנות שלה בעבר (אסור להשאיר פחות מ-2 נקודות על המעגל). הוכח/י כי אי אפשר להעביר רק ע"י הפעולות האלה מעגל עם שתי נקודות אדומות למעגל עם שתי נקודות כחולות.

פתרון. קודם כל, ברור שהזוגיות של כמות הנקודות הכחולות לא משתנה. הרי מוסיפים או מורידים רק נקודות אדומות, ולפעמים הופכים צבעים של שני נקודות בו-זמנית, ושני הדברים לא משנים את הזוגיות של הנקודות הכחולות.
העובדה הזאת לבד לא עוזרת להבדיל בין המצב של שני נקודות אדומות למצב של שני נקודות כחולות. אבל יש תכונה נוספת שנשמרת.
הנקודות הכחולות מפרידות את המעגל למספר זוגי של קשתות. ניקח את כמות הנקודות האדומות בקשתות הזוגיות מינוס הכמות של הנקודות האדומות בקשתות האי-זוגיות.

הקורה מוזמן לבדוק, בתור תרגיל, שהשארית של המספר הזה לאחר חילוק בשלוש לא משתנה תחת הפעולות המותרות.
במצב של שתי נקודות אדומות מספר זה שווה ל- 2, כלומר לא מתחלק ב- 3. ובמצב של שתי נקודות כחולות המספר שווה ל- 0, כלומר מתחלק ב- 3.
לכן אי-אפשר לעבור ממצב ראשון למצב שני. מש"ל.
זה בדרך כלל רעיון טוב לחפש אינווריאנטים, תכונות שלא משתנות, בבעיות כאלה. כמובן, הקורה יכול לשאול, איך אפשר להמציא אינווריאנט מוזר כל כך. לכן אנחנו מביאים עוד פתרון, שממנו התשובה לשאלה ברורה יותר, למרות שהוא משתמש בחומר מתקדם, מעבר לרמה של בה"ס.

<u>פתרון למתקדמים</u>

נתבונן בחבורת הסימטריות של משולש (או מה שאותו דבר חבורת התמורות של 3 איברים: $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
נקרא לשני איברים ב- S שקולים אם קיים d ב- S כך ש- $a = d^{-1}bd$ כאשר פעולת הכפל היא פעולת ההרכבה. השקילות שהגדרנו היא כידוע יחס שקילות ומחלקת את החבורה S למחלקות שקילות הבאות:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}, R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כעת נזהה נקודה אדומה על המעגל עם תמורת סיבוב $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ונקודה כחולה עם תמורת שיקוף $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. ועבור איזשהו סידור של נקודות אדומות וכחולות על המעגל נרכיב את התמורות שמתאימות לנקודות אלה אחת אחרי השנייה ונירא את מחלקת השקילות שאליה משתייכת התמורה שקיבלנו (מחלקה זו מוגדרת היטב כי סדר ההרכבה במעגל לא חשוב: $f \circ g = g^{-1} \circ \left(g \circ f \right) \circ g$). קל לבדוק שמחלקה זו היא אינווריאנט (לא משתנה) תחת הפעולות המותרות של הבעיה. מעגל עם שתי נקודות אדומות נותן $R \sim R^2$ ומעגל עם שתי נקודות כחולות נותן $I = B^2$ והם לא שקולים.