תרגיל 13

1. במישור נתונים 10 ישרים ו-10 נקודות. הוכח שאפשר לבחור נקודה כזאת, שמרחק ממנה לכל ישר נתון קטן יותר מאשר מרחק ממנה לכל נקודה נתונה.

פתרון. נבחר קרן כלשהי, שלא מקבילה לאף ישר. קצב גידול המרחק מכל ישר כאשר הולכים על הקרן הוא לינארי עם מקדם שקטן מ-1. אבל קצב גידול של מרחק מכל נקודה נתונה הוא מתקרב ל-1 כאשר מגיעים מספיק רחוק.

ביטוי מדויק לזה: אם ניקח נקודה במרחק x מתחילת הקרן אז מרחק לישר כלשהו הוא $|\alpha_i x+\beta_i|$ כאשר $\alpha_i<1$, ומרחק מהנקודה לנקודה נתונה הוא לפחות $x-d_j$, כאשר d_j זה מרחק בין תחילת הקרן לנקודה נתונה מספר j. ברור שעבור x מספיק גדול $|\alpha_i x+\beta_i|<x-d_j$, לכל $1\le i,j\le 10$.

2. על מעגל נתון נבחרו נקודות A, B שונות, והן מחלקות מעגל לשתי קשתות. תאר את המקום הגיאומטרי של אמצע המיתרים, שקצותיהם נמצאים על שתי קשתות שונות.

פתרון. כל נקודה בעיגול חוץ מהמרכז היא אמצע של מיתר יחיד, והמרכז הוא אמצע של כל הקטרים.
חוץ מהמרכז, כל נקודה יכולה להיות אחת מ-3 סוגים:
(א) אמצע של קשת עם קצוות בקשתות שונות,
(ב) אמצע של קשת עם קצוות מאותה קשת,
(ג) אמצע של קשת שאחד מקצותיה הוא A או B.
בשביל לעבור מנקודה של סוג א' לנקודה מסוג ב', צריך לבקר בנקודה מסוג ג' (או במרכז).
נקודות מסוג (ג) הם שני מעגלים הומותטיים עם מקדם 1/2 למעגל המקורי. הם מחלקים את העיגול הגדול ל-4 או ל-5 חלקים. חלקים שקשורים למיתרים שנחתכים עם האנך האמצעי הם מסוג ב', לכן צריך לקחת את שני החלקים האחרים. לכל חלק כזה מספיק למצוא נקודה בודדת שמקיימת את התנאי, וזה לא קשה.
לכן מקבלים את ההפרש הסימטרי של שני העיגולים הקטנים.

3. נתונות 10 נקודות במישור. יוסי מחפש ישר כזה, שסכום מרחקים ממנו לנקודות הנתונות יהיה קטן ביותר. הוכח שישר זה חייב לעבור דרך שתי נקודות נתונות, ושהוא מחלק את המישור לשני חלקים שבכל אחד מהם יש 4 נקודות לכל היותר.

פתרון. ניקח ישר כלשהו, ונזיז אותו ללא שינוי כיוון. כל עוד שיש יותר נקודות בצד אחד שלו מאשר בצד השני, הזזה לכיוון של יותר נקודות מקטינה את המרחק.
לכן המינימום מתקבל בכל המצבים בהם הישר נמצא בין הנקודה החמישית לשישית (כאשר הנקודות ממוספרות לפי הכיוון שמאונך לכיוון הישר). לכן אפשר להניח שהמצב המינימלי מתקבל כאשר הישר עובר דרך אחת הנקודות, ובכל צד שלו יש לא יותר מ-5 נקודות.

ניקח ישר מסוג זה, וננסה לסובב אותו מסביב לנקודה מסומנת שהוא מכיל, בזוויות מספיק קטנות כך שכל הנקודות המסומנות עדיין יישארו באותו צד שלו כמו קודם. שוב נמספר את הנקודות בכיוון שמאונך לישר (כלומר הישר עצמו יעבור דרך נקודה חמישית או שישית). נצייר ווקטורים v_1, v_2, v_3, v_4, v_5: וקטור מספר i מתחיל בנקודה מספר i ומסתיים בנקודה $i+5$. אז סכום המרחקים מהנקודות הנתונות לישר שווה לסכום היטלי הוקטורים v_i לכיוון שמאונך לישר. אפשר להגיד גם שזה שווה לאורך ההיטל של $v_1+v_2+v_3+v_4+v_5$ לאותו הכיוון. הכיוון שייך לקשת מסוימת, ההיטל על הכיוון הזה יהיה הכי קצר באחד המצבים הקיצוניים, כלומר כאשר ישר יעבור דרך 2 נקודות לפחות. מש"ל.

הערה. קיום המינימום בכל כיוון ברור, כי אין טעם לקחת ישרים רחוקים ממש. קיום המינימום הגלובלי מתקבל מקומפקטיות של המעגל. באופן דומה בשאלה הבאה קיום המינימום מתקבל לקומפקטיות של הקליפה הכדורית.

4. במרחב נתונות 4 נקודות שהן לא על מישור אחד. הוכח שהמישור שסכום המרחקים ממנו לכל 4 נקודות הנתונות מינימלי מתלכד עם הפאה בעלת השטח המקסימלי.

פתרון. נבחר ישר כלשהו שעובר דרך המישור, ונתבונן במישורים שמכילים את הישר הזה או איזשהו ישר שמקביל לו. אז בעצם אפשר להטיל את השאלה למישור שמאונך לישר, כלומר לעבור לשאלה מישורית על 4 נקודות וישר שסכום המרחקים ממנו מינימלי. שאלה זו היא גרסה יותר פשוטה של השאלה הקודמת שפתרנו, ויוצא שהישור צריך לעבור דרך שתי נקודות (כזה ששתי נקודות האחרות לא נמצאות באות צד שלו).
כעת ניקח מישור שעובר דרך שני קודקודים כלשהם, ונסובב אותו מסביב למקצוע הזה. כדי לראות מה מתרחש, כדאי להטיל את הכול למישור שמאונך למקצוע הזה. נקבל ישר שעובר דרך נקודה נתונה A (הטלת המקצוע), ואנחנו מנסים למזער את סכום המרחקים מהישר לשתי הנקודות B, C. אם הישר מפריד את B מ-C אז סכום המרחקים הוא אורך ההטלה של ווקטור BC לכיוון שמאונך לישר. אם הישר לא מפריד אותם, אז סכום המרחקים הוא אורך הטלה של ווקטור 'BC, כאשר 'C סימטרי ל-C ביחס ל-A. בכל מקרה, ההטלה הכי קצרה מתקבלת בקצה התחום (כי קל לראות שההטלה אף פעם לא מתאפסת) לכן המישור חייב לעבור דרך 3 קודקודים.
לכן 4 מישורים היחידים שיש טעם לבדוק הם מישורי הפאות, וסכום מרחקים במקרים אלה זה הגובה לאותה פאה. גובה כפול שטח הבסיס הוא בכל המקרים שווה ל-3 פעמים הנפח, לכן הפאה עם השטח המרבי מתאימה לגובה הקטן ביותר.

5. גוף קמור נמצא בקוביית יחידה, והטלה שלו על כל פאה מכסה את הפאה לחלוטין. מהו הנפח המינימלי של הגוף הקמור?

פתרון. אם הטלה מכסה כל פאה, אז יש לכל פינה של כל פאה נקודה שמוטלת עליה. במילים אחרות, יש לגוף נקודה משותפת עם כל מקצוע.
גם ההפך נכון: אם יש לגוף קמור נקודה משותפת עם כל מקצוע בכיוון מסוים, אז הטלה שלו על הפאה האנכית מכסה את הפאה (הרי הטלה של גוף קמור זו צורה קמורה).

לכן מספיק לקחת 12 נקודות, אחת על כל מקצוע (מותר שנקודות יתלכדו בקודקודים) ולהתבונן בקמור שלהם. כל נקודה מחוץ לקמור יכולה רק להגדיל את הנפח, לכן מותר להניח שאין שום דבר מחוץ לקמור. כך עברנו משאלה עם אינסוף פרמטרים (גוף קמור כללי) לנקודה עם 12 פרמטרים (קמור של 12 נציגי מקצועות).
נפח של צורה כזו שווה לנפח הקובייה פחות נפחים של 8 ארבעונים, שנוצרים מקודקוד כלשהו של קובייה ונציגים של שלושה מקצועות שלו.
ננסה להזיז נציג של מקצוע מסוים. זה ישפיע באופן ליניארי על נפחים של שני ארבעונים. לכן הנפח ישתנה באופן ליניארי, ולכן המינימום מתקבל בקצה.
לכן ניתן להניח שכל 12 הנקודות נמצאות בקודקודים. כלומר מספיק לבדוק קמורים של תתי-קבוצות של קבוצת הקודקודים, שיש להם נציג בכל מקצוע.
ניתן להניח לה"כ שאנחנו לא לוקחים את הקודקוד (0,0,0), הרי אם לוקחים את כל הקודקודים הנפח הוא 1 (וזה כמובן לא המינימום). אבל אז חייבים לקחת נציג אחד מכל מקצוע שלה, כלומר (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0).
כעת יש לנו שתי אופציות: לוקחים גם את הקודקוד (1,1,1), או לא לוקחים אותו.

אם לוקחים אותו מקבלים ארבעון משוכלל, (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1), שהיטלים שלו מכסים את כל המקצועות ואין טעם להוסיף עוד קודקודים. משלימים אותו לקובייה 4 ארבעונים שנפח של כל אחד מהם $\frac{1}{6}$ נקבל צורה שמקיימת את התנאים, והנפח שנשאר הוא $\frac{1}{3}$.

אם לא לוקחים את (1,1,1), אז חייבים לקחת נציג בכל מקצוע שלו, כלומר חייבים לקחת את הקודקודים (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1). מקבלים תמניון, שמשלימים אותו לקוביית יחידה רק 2 ארבעונים של נפח $\frac{1}{6}$ לכן נפחו $\frac{2}{3}$ וזה פחות טוב.

6. לכל צלע b של מצולע קמור P נשייך את השטח הגדול ביותר של משולש אשר צלע אחת שלו היא b וכולו מוכל ב-P. הוכח כי הסכום של השטחים המשויכים לצלעות של P גדול או שווה לפעמיים השטח של P.

פתרון. הרעיון הוא: פונקציה ליניארית שמוגדרת על קטע מקבלת את הערך המינימלי באחד הקצוות.
נסמן את שטח המצולע S, ואת סכום שטחי המשולשים T, ואת הקודקודים A_i. אם מזיזים קודקוד כלשהו לאורך קטע של ישר, כל עוד והכיוונים של הצלעות לא מתלכדים, השיוך של קודקודים לצלעות לא משתנה. לכן הפונקציה $2T - S$ היא לינארית על קטע זה, ומינימום שלה מתקבל באחד הקצוות (שטח המשולש משתנה לינארי אם הקודקוד משתתף במשולש, אחרת הוא לא משתנה כלל).
הרעיון השני הוא שיטת הירידה. עבור משולש $3S = T$, עבור טרפז או מקבילית $2S = T$ (תרגיל קל).
ובכן, ניקח דוגמה נגדית עם מספר מינימלי של קודקודים (לפחות 4), ונבדוק שני מקרים: כאשר כל הצלעות לא מקבילות וכאשר יש זוג צלעות מקבילות.

מקרה ראשון: אין צלעות מקבילות. ניקח קודקוד A_3 ונזיז אותו לאורך הישר שעובר דרכו ומקביל ל-A_2A_4, עד המצב שבו כיוונים של שני צלעות כלשהם מתלכד. מצב כזה חייב לקרות כאשר מזיזים מספיק רחוק: למשל בכיוון אחד כאשר A_3 מגיע לישר A_1A_2, בכיוון שני כאשר מגיעים לישר שמקביל ל-A_1A_2 ועובר דרך A_4 (כמובן יכול לקרות גם קודם).
אם מגיעים למצב שזווית של מצולע הופכת ל-180°, אז שני צלעות הופכות לצלע אחד, ויש להם קודקוד משויך משותף, לכן מגיעים למצב של מצולע עם פחות צלעות, ובמקרה זה T – 2S. לכן נשאר לטפל במקרה של מצולע שיש לו זוג צלעות מקבילות (אם T – 2S שלילי איפשהו, אז הוא שלילי גם במצב מהסוג הזה).

מקרה שני: יש שתי צלעות מקבילות, למשל A_1A_2 מקביל ל-A_kA_{k+1}.
נוסיף לשני אורכי הצלעות המקבילות מספר ממשי d, שיכול להיות כל דבר בין $-\min(A_1A_2, A_kA_{k+1})$ ל-$+\infty$. הכיוונים של כל הצלעות ישמרו, לכן גם שיוך בין צלעות לקודקודים ישמר. במקרה הקיצוני של $-\min(A_1A_2, A_kA_{k+1})$ כמות הצלעות במשולש יורדת (חוץ מהמקרה של מקבילית שבה המצולע מתנוון), בכל מקרה T – 2S אי-שלילי במקרה זה. נשאר לבדוק ש-T/S הוא לפחות 2 כאשר d שואף לאינסוף.
אם היינו מתאימים לצלעות $A_2A_3, A_3A_4, ..., A_kA_{k+1}$ את הקודקוד A_1, ולכל הצלעות האחרות את הקודקוד A_k, סכום שטחי המשולשים היה יוצא 'T, שזה לא גדול מ-T, אבל הוא גדול או שווה לפעמיים שטח הטרפז $A_1A_2A_kA_{k+1}$. מכיוון שהשטח של הטרפז $A_1A_2A_kA_{k+1}$ הוא כמעט כל השטח של המצולע (יחס השטחים שואף ל-1 כאשר d שואף לאינסוף), הגבול של T'/S הוא לפחות 2, לכן גם הגבול של T/S הוא לפחות 2.
לכן שיפוע של פונקציה ליניארית T(d) גדול מפעמיים השיפוע של פונקציה ליניארית S(d), לכן אם T – 2S אי-שלילי בתחילת התחום הוא אי-שלילי בכל התחום. מש"ל.