תרגיל 12

1. יהי $p(x)$ פולינום עם מקדמים שלמים.

א. הוכח כי $p(x)\left|p\left(x+p(x)\right)\right.$.

ב. הוכח כי $p(x)-x\left|p\left(p\left(p\left(p(x)\right)\right)\right)-x\right.$.

תזכורת. $p(x)\left|q(x)\right.$, או $p(x)$ מחלק את $q(x)$, זהו סימון מקוצר ל-$q(x)$ מתחלק ב-$p(x)$.

א. פתרון ראשון. אם $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, אז $p\left(x+p(x)\right)$ זה $p(x)=a_0+a_1\left(x+p(x)\right)+a_2\left(x+p(x)\right)^2+...+a_n\left(x+p(x)\right)^n$.
נפתח סוגריים ונקבל הרבה מחוברים שמתחלקים ב-p ובנוסף המחוברים $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, שגם זה מתחלק ב-$p$ כי זה p.

פתרון שני. נסתכל על השורשים. צריך לבדוק שכל בשורש של p הוא גם שורש של $p\left(x+p(x)\right)$ עם לפחות אותו ריבוי. זה שהוא שורש זה די ברור. זה שהריבוי לא יותר גבוה אפשר לקבל למשל מקצב גידול של הפולינום בסביבה של השורש: אם $p(x)=O\left(\left(x-x_0\right)^k\right)$ אז
$p\left(x+p(x)\right)=O\left(\left(x+p(x)-x_0\right)^k\right)=O\left(\left(x-x_0+\left(x-x_0\right)^k\right)^k\right)=O\left(\left(x-x_0\right)^k\right)$.

ב. אם נסמן בסעיף א' $q(x)=p(x)+x$ אז $\left(q(x)-x\right)\left|\left(q\left(q(x)\right)-q(x)\right)\right.$.
לכן גם $\left(q(x)-x\right)\left|\left(q\left(q(x)\right)-q(x)+q(x)-x\right)=\left(q\left(q(x)\right)-x\right)\right.$ לכל פולינום.
לכן $p(x)-x\left|p\left(p(x)\right)-x\right|p\left(p\left(p(x)\right)\right)-x\left|p\left(p\left(p\left(p(x)\right)\right)\right)-x\right.$.

2. הוכח כי קיימים אינסוף ערכים x טבעיים, עבורם המחלקים הראשוניים של x^2+1 כולם קטנים מ-x.

פתרון. נשתמש ברעיון מהשאלה הקודמת. אם $p(x)=x^2+1$ הוא פולינום, אז זה מחלק את $p\left(p(x)+x\right)=\left(x^2+x+1\right)^2+1=x^4+2x^3+3x^2+2x+2=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+2\right)$.
לכן לכל $y=x^2+x+1$ כאשר x טבעי המספר y^2+1 מתפרק לשני גורמים. אם נניח בנוסף ש-x זוגי, אז נקבל אפילו שלושה גורמים $y^2+1=\left(x^2+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)\cdot 2$. כל שלושת הגורמים קטנים מ-y, לכן גם כל הגורמים הראשוניים קטנים מ-y.

3. הוכח כי עבור כל פולינום p מדרגה 2 בעל מקדמים שלמים, קיימים אינסוף ערכים x טבעיים, עבורם המחלקים הראשוניים של $p(x)$ כולם קטנים מ-x.

פתרון. ללא הגבלת הכלליות, המקדם המוביל של p חיובי (אחרת נחליף סימן).
נשתמש באותו רעיון. $p(p(x)+x)$ מתחלק ב-$p(x)$. הפולינום $p(p(x)+x)$ הוא מדרגה 4, והפולינום $p(x)$ הוא מדרגה 2. לכן $p(p(x)+x)=p(x)q(x)$.
לכן אם ניקח $y=p(x)+x$, נקבל שכל גורם של $p(y)$ הוא גורם של $p(x)\cdot q(x)$. אבל $p(x)<y$, ועבור x גדול מספיק $p(x)>0$ לכן מחלקים ראשוניים שלו קטנים מ-y.
$p(x)>kq(x)$ עבור x גדול מספיק, כאשר k זה מספר טבעי שאפשר לבחור מראש. ניקח m טבעי כזה ש-$q(m)=a>k$. אז כאשר $x=m+an$ לכל n טבעי, $q(x)$ מתחלק ב-a. לכן עבור איברים מספיק גדולים של סדרה חשבונית $x=m+an$ זאת, למספר $y=p(x)$ מתקיים $p(y)=p(x)\cdot a\cdot\frac{q(x)}{a}$, וכל הגורמים במכפלה זאת קטנים ממש מ-y.

4*. הוכח כי לכל n טבעי, קיימים אינסוף ערכים x טבעיים עבורם המחלקים הראשוניים של x^n+1 כולם קטנים מ-x.

פתרון. נציב $x=y^{p_1p_2\cdots p_k}$, כאשר $p_1,p_2,...,p_k$ מספרים ראשוניים אי-זוגיים שונים שכולם גדולים מ-n. נסמן $N=np_1p_2\cdot...\cdot p_k$. אזי למספר $x^n+1=y^N+1$ קיים מחלק שהוא $x>y^{N/p_i}+1$.
אם נחלק את הפולינום y^N+1 במחלקים המשותפים שלו עם כל $y^{N/p_i}+1$ (לפולינומים אלה עלולים להיות מחלקים משותפים, לכן החל מרגע מסוים זה עלול לא להתחלק בשלומות, ונצטרך לחלק במחלק משותף ולא בפולינום עצמו) נקבל פולינום ששורשיו הם שורשי יחידה מסדר N אבל לא מסדר N/p_i עבור $i=1,2,...,k$. דרגה של פולינום זה היא $N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$.
ובכן, אם נמצא $p_1,p_2,...,p_k$ מספרים ראשוניים אי-זוגיים שונים שכולם גדולים מ-n, עבורם $N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)<n$, אז הפולינום y^N+1 יתפרק למכפלת הגורמים שכולם פולינומים מדרגה קטנה מ-n. אז אם נציב בפולינומים אלה מספרים מספיק גדולים נקבל מש"ל. נוכל אפילו להציב מספרים מסוג מסוים, למשל מסוג $x=ay^n$ (זה חשוב לשאלה הבאה).
ובכן מספיק להוכיח שהמכפלה האינסופית $P=\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)$ על פני מספרים ראשוניים גדולים מ-n שואפת ל-0, כאשר במכפלה משתתפים כל הראשוניים השונים $p>n$.
אפשר להתעלם מהתנאי $p>n$, הרי עד n יש רק מספר סופי של ראשוניים. לכן מספיק להוכיח שהמכפלה על כל הראשוניים $P=\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)$ שואפת ל-0. אנחנו נוכיח (וזה

שקול) שהמכפלה $\frac{1}{P}=\prod\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\prod\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+...\right)$ מתכנסת לאינסוף. אם נפתח סוגריים במכפלה, לפי משפט היסודי של אריתמטיקה, המחובר $\frac{1}{n}$ לכל n טבעי יופיע פעם אחד בדיוק (אם ניקח מכפלה רק עד ראשוני מסוים, יופיעו בסכום רק מחוברים שיש לכם גורמים ראשוניים מספיק קטנים). אבל הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר. מש"ל.

5. הוכח כי לכל n,a,b טבעיים, קיימים אינסוף ערכים x טבעיים עבורם המחלקים הראשוניים של ax^n+b כולם קטנים מ-x.

פתרון. מותר להניח כי $b=1$. אכן, אם נחפש פתרון בצורה $x=by$ אז $b\left(Ay^n+1\right)$. אם לגורם Ay^n+1 כל המחלקים הראשוניים גדולים מ-y עבור אינסוף ערכי y שונים, אז הם גם קטנים מ-x.
ובכן, מעכשיו נדבר על פולינום ax^n+1.
נציב כעת $x=a^m y^k$, כאשר k,m הם מספרים שיבחרו בקרוב. אז נקבל $a^{mn+1}y^{kn}+1$.
נבחר k,m כך ש-$mn+1=k$. אז מספיק שיתקיים שלמספר $z^k+1=\left(ay^n\right)^k+1$ המחלקים הראשוניים כולם קטנים מ-$z=ay^n$. לכן מספיק לבדוק שלשאלה הקודמת עבור פולינום x^k+1 יש אינסוף פתרונות מסוג ay^n ואת זה הוכחנו במהלך הפתרון של השאלה הקודמת.