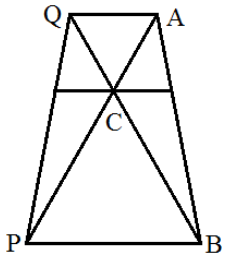
תרגיל 11

1. ABCD טרפז, $AB = a$, $CD = b$ מקבילים. נקודות E, F נמצאות על BC, AD כך ש-EF מקביל ל-AB, CD ועובר דרך X שהיא נקודת מפגש האלכסונים של הטרפז.
א. הוכח כי X חוצה את EF.
ב. בטא את EF באמצעות a, b.

פתרון. משולשים ACD, AXF דומים, לכן $\frac{XF}{b}=\frac{XF}{CD}=\frac{AX}{AC}$.
גם המשולשים XAB, XCD דומים, לכן $\frac{AC}{AX}=\frac{AX+CX}{AX}=1+\frac{CX}{AX}=1+\frac{a}{b}=\frac{a+b}{b}$.
ז. א. $\frac{XF}{b}=\frac{a}{a+b}$ במילים אחרות $XF=\frac{ab}{a+b}$.
אפשר לחשב את XE באותה שיטה ולראות שיוצא אותו דבר.
לכן X הוא האמצע של EF, ואורך של EF הוא $\frac{2ab}{a+b}$.

2. א. במשולש ABC הזווית C היא 120°, ואורכי הצלעות הן $BC = a$, $AC = b$. הוכח כי אורך חוצה הזווית CD היא $\frac{ab}{a+b}$.
ב. הכלל את הנוסחה למקרה שהזווית C היא γ (אורך של CD כפונקציה של a,b,γ).



פתרון. א. נצייר משולשים שווי-צלעות ACQ, BCP (מבחוץ למשולש ABC). היות והזווית ACB היא 120°, יוצא ש-C היא נקודת מפגש האלכסונים של הטרפז ABPQ, אורכי הבסיסים הם a,b, ולכן לפי שאלה הקודמת אורך חוצה הזווית הוא כמו XE מהשאלה הקודמת, כלומר $\frac{ab}{a+b}$.

ב. כאן אפשר לעשות דבר דומה: מצמידים למשולש ACB משולש חופף PQC שמסתכל הפוך: נקודה Q על המשך של BC בצד של C, כך ש- $CQ = a$, נקודה P על המשך של AC בצד של C, כך ש- $CQ = b$. אז שוב מקבלים טרפז ואפשר להשתמש בנוסחה של השאלה הקודמת, רק שהפעם הבסיסים הם $2a\cos\frac{\gamma}{2}$, $2b\cos\frac{\gamma}{2}$, ולכן התשובה היא $\ell=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$.

הערה. יש גם פתרון קצת יותר מסובך, אבל גם נחמד שמבוסס על חשבון שטחים: $\frac{1}{2}\ell a\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\ell b\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

3. במשולש ABC חוצי הזוויות הן AK, BL, CM. הוכח כי הזווית KLM ישרה אם ורק אם הזווית ABC היא 120°.

פתרון. אומנם כאשר רושמים הוכחה יותר נוח לכתוב ישר את המקרה הכללי, כאשר מנסים לבנות הוכחה לפעמים יותר נוח להתחיל מהמקרה הפרטי ולהבין מה קורה במקרה זה, כי זה יותר קל ומפתח את ההבנה שתאפשר לטפל גם במקרה הכללי. לכן אנחנו קודם נדון במצב של 120° ואחר-כך נראה את המקרה הכללי.

נסמן: $\mathrm{BC}=a,\mathrm{AC}=b,\mathrm{AB}=c,\mathrm{BL}=\ell,\mathrm{AL}=c_1,\mathrm{CL}=a_1$. ניקח נקודה P על המשך BC (מעבר ל-B) עבורה $\mathrm{BP}=a$, ונקודה Q על המשך AB גם מעבר ל-B עבורה $\mathrm{BQ}=c$. במקרה הפשוט של 120° המשולשים ABP, CBQ יהיו משוכללים.

נזכיר את תכונת חוצה זווית (שנשתמש בה מספר פעמים): חוצה זווית מחלק את הצלע ביחס ששווה ליחס הצלעות הצמודות לקטעים. למשל: $\frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1}$.

המשולשים ALB, ACQ דומים. לכן $\frac{c_1}{\ell}=\frac{b}{a}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{BK}}$. לכן במשולש ALB הישר LK הוא חוצה זווית. באופן דומה, הישר LM חוצה את הזווית BLC. לכן הזווית KLM היא חצי מהזווית ALC, שהיא 180°, לכן KLM זווית ישרה מש"ל.

בשביל המקרה הכללי צריך את הטענה ההפוך לתכונת חוצה הזווית: אם במשולש XYZ נקודה T על XY מקיימת אי-שוויון $\frac{\mathrm{XT}}{\mathrm{YT}}<\frac{\mathrm{XZ}}{\mathrm{YZ}}$, אז ZT נמצא בצד של X יחסית לחוצה זווית ZU של הזווית XZY. להפך, אם האי-שוויון לכיוון השני, אז ZT נמצא בצד של Y יחסית לאותו חוצה זווית. ההרחבה הזאת של תכונת חוצה זווית היא תרגיל לקוראים.

העניין הוא כזה. חוצי זוויות של BLA, BLC תמיד מאונכים. אם נוכיח שהקרניים LK, LM נמצאים בתוך הזווית שהם יוצרים (בצד של B) אז הזווית KLM היא חדה ולא ישרה. אם נוכיח ששני הקרניים נמצאים בצד של A ו-C בהתאמה ביחס לחוצי זוויות של BLA, BLC, אז הזווית כהה ולא ישרה. בשביל לבדוק באיזה צד של חוצה זווית נמצא הקרן, מספיק להשוות יחסים של קטעים לפי גרסה הפוכה של תכונת חוצה זווית.

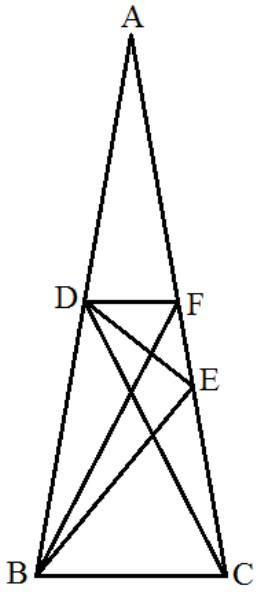
במקרה הכללי $\mathrm{CQ}=2a\cos\frac{\beta}{2}$, $\mathrm{AP}=2c\cos\frac{\beta}{2}$ כאשר β היא הזווית ABC. אז בדומה למה שמצאנו במקרה הטוב, $\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LA}}=\frac{\ell}{c_1}=\frac{2a\cos\frac{\beta}{2}}{b}$ וצריך להשוות את זה ל-$\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{KA}}=\frac{a}{b}$.

לכן K נמצא בצד של B יחסית לחוצה הזווית של BLA כאשר $2\cos\frac{\beta}{2}>1$, ובצד של A כאשר $2\cos\frac{\beta}{2}<1$.

באופן דומה M נמצא בצד של B יחסית לחוצה זווית של BLC כאשר $2\cos\frac{\beta}{2}>1$, ובצד של C כאשר $2\cos\frac{\beta}{2}<1$.

אנחנו רואים שהזווית KLM יכולה להיות ישרה רק כאשר $\cos\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$, כלומר כאשר $\beta=60^\circ$.

4. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים, $AC = AB$ והזווית A היא 20°. על AB, AC נבחרו נקודות D, E בהתאמה כאלה שהזווית DCB היא 60° והזווית EBC היא 50°. מצא את גודל הזווית CDE.



פתרון. תהי F נקודה על AC עבורה הזווית FBC היא 60°. הקטעים BF, CD נפגשים בנקודה X. המשולש BCX משוכלל, וכך גם המשולש DFX, לכן $CB = CX$.
המשולש BEC הוא שווה-שוקיים (הרי זוויותיו $80^\circ, 50^\circ, 50^\circ$) לכן $CE = CB = CX$. לכן גם המשולש XEC שווה שוקיים, שזווית הראש שלו 20° וזוויות הבסיס שלו 80°. לכן הזוויות DXE היא 100°. גם זווית DFE היא 100°.

מכאן קל להבין שהמרובע DFEX הוא דלתון (המשולש DFX סימטרי ביחס לגובה מ-D, וזוויות DFE, DXE שוות, לכן גם E על ציר הסימטריה). לכן הזווית XDE היא $\frac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ$. מש"ל.

5. א. מנקודה C מחוץ למעגל העבירו משיקים למעגל, A ו-B הן נקודות ההשקה. משיק נוסף חותך את הישרים CA, CB בנקודות P, Q בהתאמה.
בטא את $\frac{AP\cdot BQ}{CP\cdot CQ}$ באמצעות הזווית $\gamma = \sphericalangle BAC$.

ב. למצולע $A_1A_2\ldots A_{2n}$ יש מעגל חסום. לכל ישר ℓ שמשיק לאותו המעגל אבל שונה מכל צלע של המצולע, נגדיר d_i = המרחק מהקודקוד A_i לישר ℓ. הוכח כי $\frac{d_1\cdot d_3\cdot\ldots\cdot d_{2n-1}}{d_2\cdot d_4\cdot\ldots\cdot d_{2n}}$ אינו תלוי ב-ℓ.

פתרון. א. במשולש CPQ, שאת הצלעות שלו נסמן $CP=a,\ CQ=b,\ PQ=c$, הקטעים AP, BQ הם $\frac{c+a-b}{2}, \frac{c+b-a}{2}$ באיזשהו סדר (הסדר תלוי בכך, האם המעגל משיק לו מבפנים או מבחוץ).
לכן $AP\cdot BQ = \frac{c+a-b}{2}\cdot\frac{c+b-a}{2} = \frac{c^2-b^2-a^2+2ab}{4} = 2ab\frac{1-\cos\gamma}{4} = ab\sin^2\frac{\gamma}{2}$.
לכן $\frac{AP\cdot BQ}{CP\cdot CQ} = \frac{ab\sin^2\frac{\gamma}{2}}{ab} = \sin^2\frac{\gamma}{2}$.

ב. נסמן ב-P_i נקודת חיתוך של הישר ℓ עם A_iA_{i+1} (כלומר P_{i-1} היא נקודת חיתוך של הישר ℓ עם A_iA_{i-1}), וב-T_i את נקודות ההשקה של A_iA_{i+1} עם המעגל החסום.
אזי $d_i = p_i\cdot A_iP_i = p_{i-1}\cdot A_iP_{i-1}$, כאשר p_i זה אחד חלקי סינוס הזווית בין ℓ ל-A_iA_{i+1}.
לכן לפי סעיף הקודם של השאלה, $d_i^2 = p_{i-1}p_i\cdot A_iP_{i-1}\cdot A_iP_i = a_ip_{i-1}p_i\cdot A_iT_{i-1}\cdot A_iT_i$, כאשר a_i תלוי רק בזווית $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. כאשר נכפיל את כל הביטויים האי-זוגיים שרשמנו במונה, ואת האי-זוגיים במכנה, נקבל מש"ל.