תרגיל 10

1. בכיתה לכל תלמיד יש K חברים, ולכל שני חברים יש בדיוק 5 חברים משותפים (לא כולל את עצמם). הוכח שכמות הילדים בכיתה מתחלקת ב-3, או ש-K מתחלק ב-3.

פתרון. נספור בשתי דרכים את השלשות הסדורות שבהם כולם חברים. נניח שסה"כ יש N אנשים, אז יש NK זוגות סדורים של חברים. כל זוג שייך ל-5 שלשות, לכן יש 5NK שלשות סדורות של חברים. זה שווה ל-6 פעמים כמות השלשות הלא-סדורות של חברים. לכן 5NK מתחלק ב-3, ולכן N או K מתחלק ב-3.

2. נתון מצולע משוכלל בעל 2005 קודקודים. M קודקודים שלו נצבעו בצבע לבן, והאחרים בשחור. האם אפשר על סמך זה לחשב את כמות המשולשים שווי-השוקיים שקודקודיהם הם קודקודי המצולע והם באותו צבע?

פתרון. יש סה"כ $M(2005-M)$ זוגות של קודקודים שאחד מהם שחור והשני לבן.
כעת נספור אותם בצורה אחרת. יש X משולשים שווי-שוקיים שמכילים 0 זוגות כאלה, ויש Y משולשים שווי שוקיים שמכילים 2 זוגות כאלה.
נשים לב שכל זוג קודקודים מוכל ב-3 משולשים שווי-שוקיים בדיוק (כאשר הקודקוד הראשון הוא הראש, כאשר השני הוא הראש, וכאשר אף אחד מהם). משולשים אלה שונים, כי 2005 לא מתחלק ב-3 ואף משולש אינו שווה צלעות. לכן $2Y = M(2005-M)$, ולכן יש $Y = \frac{M(2005-M)}{2}$ משולשים שווי-שוקיים שמכילים קודקודים משני הצבעים.
סה"כ יש לנו $2005 \cdot 1002$ משולשים שווי-שוקיים.
לכן יש $2005 \cdot 1002 - \frac{M(2005-M)}{2}$ משולשים שווי-שוקיים שכל קודקודיהם באותו צבע.

3. הילדים בקייטנה חולקו למספר קבוצות. על מנת לשפר את הגיבוש, חילקו אותם לקבוצות מחדש, כך שכל ילד עבר לקבוצה שיש בה יותר ילדים מאשר היו איתו קודם. הוכח שכמות הקבוצות ירדה.

פתרון. נייחס לכל ילד מספר שהוא אחד חלקי מספר התלמידים בקבוצה שלו. אז סכום כל המספרים שווה לכמות הקבוצות.
אחרי ההתארגנות שמשפרת גיבוש, כל מספר ירד, לכן סכומם ירד גם, לכן גם כמות הקבוצות תרד.

4. משולש חולק למרובעים קמורים. הוכח שלאחד המרובעים יש זווית שהיא לפחות 120°.

פתרון. כל קודקוד של כל מרובע יכול להיות גם קודקוד של מרובעים נוספים. בסה"כ הזוויות באותו קודקוד יכולות ליצור או 360°, או 180° אם הקודקוד צמוד לצלע של משולש או מרובע, או לאחת הזוויות של המשולש אם הוא קודקוד של המשולש.

אם יש קודקוד פנימי שסכום הזוויות בו 360°, ונפגשות בו 3 זוויות, אז אחת מהן גדולה או שווה 120°. אם אין דבר כזה, אז בכל קודקוד פנימי יש לפחות 4 זוויות.
נרשום ליד כל פינה של כל מרובע גודל של זווית לפי הכלל הבא: אם זה נמצא בקודקוד של משולש נרשום 60°, אחרת נרשום 90°. סכום הזוויות שרשמנו בקודקודי המשולש הוא לפחות 180°. סכום הזוויות שרשמנו בכל קודקוד אחר הוא גדול או שווה לסכום הזוויות שבאמת נפגשות בקודקוד זה. לכן סכום הזוויות שרשמנו גדול או שווה לסכום הזוויות האמיתי.
מצד שני סכום הזוויות שרשמנו בכל מרובע קטן או שווה ל-360° מעלת, ובמקרים מסוים אפילו פחות, לכן סכום הזוויות שרשמנו קטן ממש מסכום הזוויות האמיתי. סתירה.

5. בריבוע שצלעותיו באורך 1 ציירו מספר קטעים שמקבילים לצלעות ואורכם הכולל 18. הוכח שמבין החלקים הקשירים שנוצרו יש חלק ששטחו לפחות 0.01.

הערה. בשביל לחלק את בריבוע ל-100 משבצות ריבועיות שוות ששטח של כל אחת מהן 0.01, צריך 9 קטעי יחידה אופקיים ו-9 קטעי יחידה אנכיים, שאורכן הכולל 18.

פתרון. ההיקף הכולל של כל החלקים הוא $18\cdot 2+4=40$ (הרי כל קטע פנימי יכול לתרום להיקפי הצורות פעמיים, באמצעות שני הצדדים שלו, וכל צלע של הריבוע רק פעם אחת). לכן יש צורה, שבה היחס בין השטח להיקף גדול או שווה ל-$\frac{1}{40}$ (הרי אם לכל צורה שטח קטן מ-$\frac{1}{40}$ של ההיקף, אז כך גם בסה"כ, ואז השטח הכולל קטן מ-1).

אנחנו נקרא למצולע שלכל צלעותיו מקבילות לצירים מצולע מיושר.

טענה. לכל מצולע מיושר, ששטחו S והיקפו P, מתקיים אי-שוויון $S\ge\left(\frac{P}{4}\right)^2$.

ניסוח אחר לטענה: $\frac{1}{4}\ge\frac{\sqrt{S}}{P}$. כמובן, עבור ריבוע מתקיים שוויון.

אחד החלקים שנוצרו זה מצולע מיושר שמקיים $\frac{S}{P}\ge\frac{1}{40}$.

לכן $\frac{1}{40}\ge\frac{S}{P}=\frac{\sqrt{S}}{P}\cdot\sqrt{S}$, $\frac{1}{4}\sqrt{S}\ge\frac{\sqrt{S}}{P}\cdot\sqrt{S}$, לכן $\sqrt{S}\ge 0.1$ כלומר $S\ge 0.01$. מש"ל.

נשאר להוכיח את הטענה, ואת זה אנחנו נשאיר לקורא עם רמז: להתבונן במלבן המיושר החוסם.

6. נתונים ℓ וקטורי יחידה מאונכים בזוגות במרחב n-מימדי, שהטלותיהם האנכיות על תת-מרחב k-מימדי נתון כולם גדולים יותר מ-ε באורכם. הוכח כי $\ell\le\frac{k}{\varepsilon^2}$.

פתרון. נבחר מערכת צירים, כזאת ש- k הצירים הראשונים ישתייכו לתת-מרחב k -מימדי נתון, והצירים האחרים מאונכים לו. אז ההטלה של ווקטור על תת-מרחב זה שקולה ללקיחת k הקואורדינאטות הראשונות שלו.

נרשום בטבלא $\ell \times n$ את כל הקואורדינאטות של כל הווקטורים: כל ווקטור יתפוס עמודה באורך n. סכום ריבועי המספרים בכל עמודה שווה 1, וסכום ריבועי המספרים ב- k משבצות ראשונות של כל עמודה גדול מ- ε^2 .

נשלים את הטבלא לטבלא $n \times n$, כאשר כל פעם נוסיף עמודה שהיא ווקטור באורך 1 שמאונך לכל הוקטורים בעמודות שכבר נרשמו. מאלגברה ליניארית (מטריצות אורתוגונאליות) ידוע לנו, שגם השורות מגדירות ווקטורים באורך 1. לכן סכום ריבועי המספרים ב- k שורות ראשונות שווה ל- k. מצד שני, סכום הריבועים ב- k שורות ראשונות אפילו לפני שהוספנו עוד עמודות היה גדול מ- $\ell\varepsilon^2$. לכן $\ell\varepsilon^2 < k$. מש"ל.