תרגיל 10

1. בכיתה לכל תלמיד יש K חברים, ולכל שני חברים יש בדיוק 5 חברים משותפים (לא כולל את עצמם). הוכח שכמות הילדים בכיתה מתחלקת ב-3, או ש-K מתחלק ב-3.

2. נתון מצולע משוכלל בעל 2005 קודקודים. M קודקודים שלו נצבעו בצבע לבן, והאחרים בשחור. האם אפשר על סמך זה לחשב את כמות המשולשים השווי-שוקיים שקודקודיהם הם קודקודי המצולע והם באותו צבע?

3. הילדים בקייטנה חולקו למספר קבוצות. על מנת לשפר את הגיבוש, חילקו אותם לקבוצות מחדש, כך שכל ילד עבר לקבוצה שיש בה יותר ילדים מאשר היו איתו קודם. הוכח שכמות הקבוצות ירדה.

4. משולש חולק למרובעים קמורים. הוכח שלאחד המרובעים יש זווית שהיא לפחות 120°.

5. בריבוע שצלעותיו באורך 1 ציירו מספר קטעים שמקבילים לצלעות ואורכם הכולל 18. הוכח שמבין החלקים הקשירים שנוצרו יש חלק ששטחו לפחות 0.01.

6. נתונים ℓ וקטורי יחידה מאונכים בזוגות במרחב n-מימדי, שהטלותיהם האנכיות על תת-מרחב k-מימדי נתון כולם גדולים יותר מ-ε באורכם. הוכח כי $\ell \le \frac{k}{\varepsilon^2}$.