בד"כ מקומות גיאומטריים בשאלות אולימפיאדה נוצרים ישרים ומעגלים (אליפסות ועקומות יותר מסובכות הן לא "אלמנטאריות"). אנחנו נדבר על שני מקומות גיאומטריים מפורסמים: הציר הרדיקלי ומעגל אפולוניוס.

מעגל אפולוניוס

נניח שיש לנו שתי נקודות A, B. מהו המקום הגיאומטרי של נקודות X, כאלה ש- AX/BX = k קבוע?

התשובה: אנך אמצעי עבור k = 1 , מעגל בכל מקרה אחר.

הערה. זה קצת יותר מדי טוב בשביל להיות נכון. אם שואלים אותה שאלה עבור פעולת חשבון אחרת כלשהי, אז עבור "+" מקבלים אליפסה, עבור "–" מקבלים ענף של היפרבולה, עבור "×" מקבלים עקומים מדרגה 4 שנקראים ע"ש Cassini. ודווקא פעולת חשבון הכי מסובכת נותנת את הסוג הפשוט ביותר של עקומים.

המעגלים שמתקבלים נקראים מעגלי אפולוניוס.
כמובן צריך עוד להוכיח שזה מעגלים.

הוכחה ראשונה. נשתמש בתכונת חוצה זווית. חוצי זוויות פנימי וחיצוני של הזווית AXB חייבים לפגוש את הישר AB בנקודות ספציפיות C, D שאפשר למצוא אותן עוד לפני ש-X נקבע. לכן X נמצא על מעגל שקוטרו CD. לכן כל נקודה של המקום הגיאומטרי שייכת למעגל. כיוון הפוך (כל נקודה על מעגל שקוטרו CD שייכת למקום הגיאומטרי) מתקבל מהכיוון הראשון בשילוב עם שיקולי רציפות.

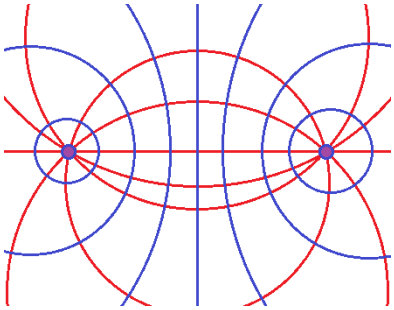
הוכחה שנייה. נשתמש בגיאומטריה אנליטית. $\frac{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2}{(x-x_b)^2+(y-y_b)^2}=k^2$. נכפיל במחנה. אם x^2+y^2 לא מצטמצם, נקבל משוואת מעגל.

תכונות של מעגל אפולוניוס:
א. מרכז שלו נמצא על הישר AB.
ב. מעגל אפולוניוס זה בדיוק מעגל, שלגביו A אינברסי ל-B.
ג. כל מעגל שעובר דרך A ו-B מאונך למעגל אפולוניוס.
ד. נניח שנקודה X נמצאת על מעגל אפולוניוס. הישר AX פוגש את המעגל שוב ב-M, והישר BX פוגש את המעגל שוב ב-W. אז M סימטרי ל-W ביחס לישר AB.

הוכחות:
א. ברור מסימטריה (ביחס ל-AB).
ב. תזכורת לגבי אינברסיה:

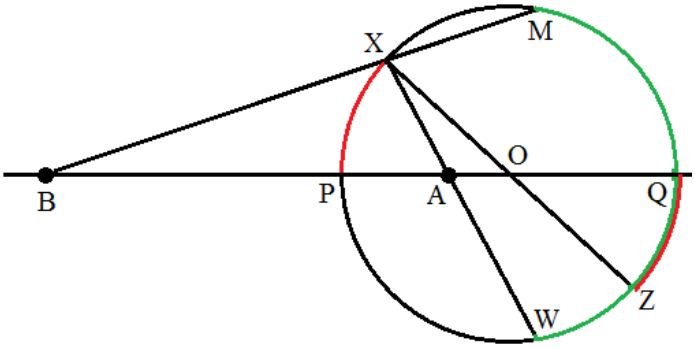
אינברסיה זו העתקה מסוימת, ששומרת על נקודות של מעגל כלשהו, ומחליפה בין נקודות פנימיות לחיצוניות.
היא מוגדרת בצורה כזאת: נקודה P עוברת לנקודה Q, אם הם נמצאים על אותה קרן שיוצאת מ-O, ובנוסף
$OP \cdot OQ = R^2$

לאינברסיה יש מספר תכונות חשובות, למשל:
(1) היא שומרת על "מעגלים מוכללים", כלומר מעבירה מעגלים וישרים למעגלים וישרים.
(2) שומרת על זוויות.
(3) שומרת על יחס כפול $[A,B;C,D]=\frac{AC}{AD}\Big/\frac{BC}{BD}=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}$.



נניח כי A אינברסי ל-B ביחס למעגל נתון, ונניח כי P, Q על המעגל. אז היחס $\frac{AP\cdot BQ}{AQ\cdot BP}$ לא ישתנה אם נחליף בין A לבין B. אבל הוא יתהפך.
כלומר $\frac{AP\cdot BQ}{AQ\cdot BP}=1$. לכן $\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{BQ}$.

ג. כל מעגל שעובר דרך A ו-B מאונך למעגל אפולוניוס – מתקבל ישירות מאינברסיה.
זה מאפשר לצייר תמונה של מעגלים שעוברים דרך 2 נקודות (אדום) ומעגלי אפולוניוס שלהם (כחול) שבה כל המעגלים האדומים מאונכים לכל המעגלים הכחולים.



ד. חוצה זווית חיצוני של AXB חותך את הקשת MW באמצע, אבל מצד שני ב-Q. מש"ל.
בציור זה רואים גם כי AXO שווה ל-XBO, לכן המשולשים AXO, XBO דומים, וזה שוב מוכיח שיש אינברסיה.

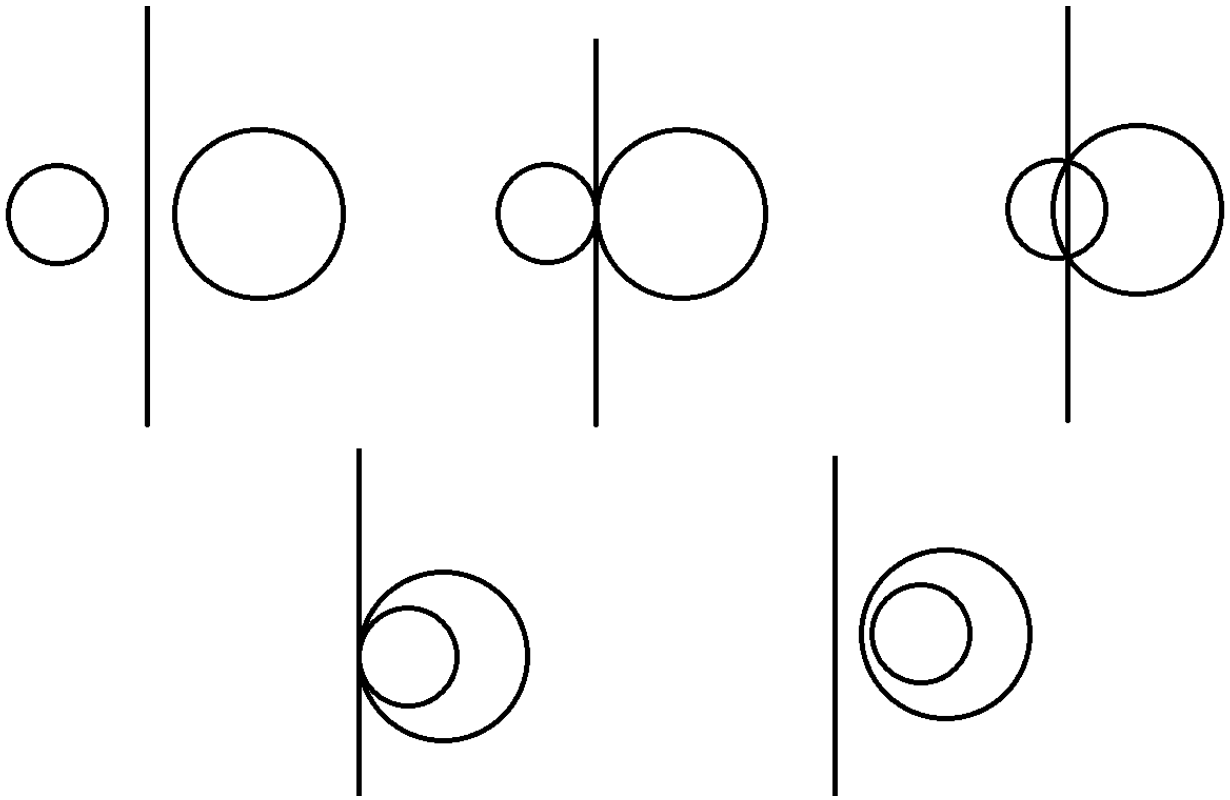
נקודה למחשבה: מהו המקום הגיאומטרי של יחס קבוע במרחב?

ציר רדיקלי

נדבר על שתי שאלות קשורות, שקשורים לשני מעגלים נתונים, α,β.
א. מהו המקום הגיאומטרי של נקודות, כאלה שמשיק מ-X ל α שווה באורכו לאורך המשיק מ-X ל- β?
ב. מהו המקום הגיאומטרי של נקודות, כאלה שדרגת הנקודה X ביחס ל- α שווה לדרגה של X ביחס ל- β?

תזכורת: דרגה של נקודה. נתונים מעגל ונקודה P. מעבירים דרך P ישר כלשהו שחותך את המעגל בנקודות A, B. אז $PA\cdot PB$ לא תלוי בשיפוע של הישר אלה רק בנקודה ומעגל. מספר זה נקרא הדרגה של נקודה P ביחס למעגל.
עדיף לרשום את הכול בקטעים מכוונים, ואז דרגה תהיה שלילית בפנים וחיובית בחוץ, תהיה שווה ל- OP^2-R^2, כאשר O זה מרכז המעגל ו-R הוא הרדיוס.

התשובה לשאלות ששאלנו לגבי שוויון של דרגות\אורכי משיקים (שזה בערך אותו דבר): המקום הגיאומטרי הוא קו ישר, וקוראים לו **הציר הרדיקלי** של שני המעגלים. הנה תמונות של מצבים שונים:



כמובן, במקרה של מעגלים נחתכים, התשובה לשאלה א' היא: "ישר ללא קטע".
תשובה לשאלה ב' זה תמיד קו ישר, חוץ מהמקרה של מעגלים קונצנטריים (בעלי מרכז משותף).

הוכחה ראשונה. נבחר מערכת צירים, שבה המרכזים נמצאים על ציר ה-x, וקואורדנטות שלהם שווים $(c_1,0)$, $(c_2,0)$, והרדיוסים הם r_1,r_2. הדרגה יחסית למעגל הראשון הוא $(x-c_1)^2+y^2-r_1^2$, ויחסית למעגל השני $(x-c_2)^2+y^2-r_2^2$. נרשום את השוויון וכל החלק הריבועי מצטמצם, נשארים עם משוואה לינארית על x.

הוכחה שנייה. קליפות כדוריות במרחב.

נעבור לדוגמאות של שאלות שאפשר לפתור באמצעות הציר הרדיקלי.

שאלה. נתונים 3 מעגלים שנחתכים בזוגות, ומרכזיהם לא על אותו ישר. לכל מעגל מעבירים את הישר של המיתר המשותף שלהם. הוכח כי הישרים האלה נפגשים בנקודה אחת.
פתרון. לנקודת החיתוך של שני צירים רדיקליים יש אותה דרגה ביחס לשלושת המעגלים, לכן היא גם על הציר השלישי.

משפט הציר האורטוצנטרי. ניקח משולש ABC, ובו הגבהים AP, BQ, CR. נקודת חיתוך של PQ ו-AB היא F, נקודת חיתוך של PR ו-AC היא E, נקודת חיתוך של PR ו-AC היא E, נקודת חיתוך של QR ו-BC היא D. הוכח כי D,E,F נמצאים על ישר אחד, וישר זה מאונך לישר של אוילר.

הוכחה. זה הציר הרדיקלי של שני מעגלים: מעגל 9 נקודות ושל המעגל החוסם.
בשביל לראות ש-F נמצא על הציר מספיק להשתמש במשפט הדרגה של נקודה למעגל ABQP.

שאלה. (תחרות הערים 32, סתיו, י"א-י"ב, שאלה 5). מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O, כאשר נקודה O לא נמצאת על אף אלכסון שלו. נתון כי מרכז המעגל החוסם של AOC נמצא על הישר BD. הוכח כי מרכז המעגל החוסם של BOD נמצא על הישר AC.

פתרון. (דן כרמון). נוכיח משפט יותר כללי:

משפט. נתונים 3 מעגלים, α, β, γ. נתבונן ב-3 טענות הבאות:

א. ציר רדיקלי של β ו-γ מכיל את המרכז של α.
ב. ציר רדיקלי של α ו-γ מכיל את המרכז של β.
ג. ציר רדיקלי של α ו-β מכיל את המרכז של γ.

אז מבין 3 טענות הללו כל שתיים גוררות את השלישית.

למה המשפט מכליל את הטענה? נסתכל במעגלים AOC, BOD, ABCD. מש"ל.

הוכחת המשפט. נסמן את מרכזי המעגלים α, β, γ ב-X, Y, Z בהתאמה, ואת הרדיוסים שלהם r_1, r_2, r_3. תנאי א' אומר כי ציר רדיקלי של β ו-γ מכיל את X, במילים אחרות:

$$XZ^2 - r_3^2 = XY^2 - r_2^2$$

אפשר להעתיק את א' גם בצורה: $XZ^2 - XY^2 = r_3^2 - r_2^2$

באופן דומה אפשר להעתיק את ב' בצורה $YX^2 - YZ^2 = r_1^2 - r_3^2$

ואת תנאי ג' אפשר לרשום באופן דומה בתור $ZY^2 - ZX^2 = r_2^2 - r_1^2$.

סכום של 3 זהויות אלו נותן זהות 0 = 0. לכן אם שניים מתוכן נכונות, אז גם השלישית נכונה.

נקודה למחשבה. יש הכללה בו-זמנית למעגל אפולוניוס ולציר הרדיקלי. המקום הגיאומטרי של נקודות שמנת הדרגות שלהם ביחס לשני מעגלים נתונים הוא מעגל מוכלל (מעגל אם היחס = 1, וישר אם היחס שונה מ-1).