תרגיל בתורת המספרים

1. הוכח שקיים מספר שלם חיובי, אשר מתחלק ב-5^{1000}, ובייצוגו העשרוני אין ספרות זוגיות.

2. יהיו a, b שלמים חיוביים זרים. הוכח כי gcd(a+b, a^2+b^2) יכול להיות שווה רק ל-1 או ל-2.

3. נתונים a, b, n שלמים חיוביים. נתון שלכל $k \neq b$ שלם, מתקיים $b-k \mid a-k^n$. הוכח כי $a = b^n$.

4. יהיו a, b, c שלמים חיוביים. הוכח כי קיימים שלמים חיוביים זרים m, n כך ש- $ma+nb$ מתחלק ב- c.

5. מצא את כל הפתרונות למשוואה $m^2 + m = a^n$, עבור a, m, n שלמים, ו- $n > 1$.

6. מצא את כל המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים n, עבורם !(n-1) לא מתחלק ב- n^2.

7. מצא את כל הפתרונות למשוואות הבאות (m, n – שלמים חיוביים):
   א) $2^n - 3^m = 1$
   ב) $3^n - 2^m = 1$

8. תהא f פונקציה מקבוצת השלמים לקבוצת השלמים החיוביים. נניח כי לכל m, n שלמים, ההפרש $f(m) - f(n)$ מתחלק ב- $f(m-n)$. הוכח כי לכל m, n שלמים שמקיימים $f(m) \leq f(n)$, המספר $f(n)$ מתחלק ב- $f(m)$.

9. מספר שלם חיובי k מקיים את התכונה הבאה: לכל שלם חיובי x, אם k מחלק את x, אז k מחלק גם את המספר שמתקבל על ידי כתיבת הספרות העשרוניות של x בסדר הפוך. הוכח כי k מחלק את 99.

10. יהיו a, b מספרים שלמים חיוביים. הוכח כי אם $4ab - 1$ מחלק את $(4a^2-1)^2$, אז $a = b$.

11. יהא k שלם חיובי, a, b – שלמים, ונניח שמתקיים $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$. הוכח כי בהכרח k – ריבוע שלם.