תרגיל בתורת המספרים

1. עבור אילו n טבעיים מתקיים $n \mid 2^{2^n}+1$?

2. יהא $p>2$ ראשוני, ונרשום $\frac{a}{b}=\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{(2p)!}+\frac{1}{p\cdot(p!)}$ שבר מצומצם.
הוכח כי b לא מתחלק ב- p.

3. עבור אילו ערכי n טבעיים, ניתן למצוא שלמים a,b כך ש- $a\cdot k^n+b\cdot m^n$ מקבל, עבור k,m שלמים, את כל הערכים השלמים האפשריים, פרט למספר סופי?

4. נסמן $s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i}$, ונרשום $s_n=\frac{a_n}{b_n}$ שבר מצומצם. הוכח כי לכל n גדול מספיק, $2^{5772} \mid a_n$.

5. מספר אי-זוגי N הוא מכפלה של 3 מספרים ראשוניים שונים. הוכח כי לכל $a\neq b$ טבעיים ל- a^N-b^N יש מחלק ראשוני שגדול מ-N.