הלמה של מנגר. יהי G גרף, v,w נק' לא סמוכות בגרף. הוכח כי מס' המסלולים הזרים בזוגות (כלומר לכל 2 מהם אין שום קודקוד משותף מלבד v,w) בין v ל-w זהה למס' הנק' המינימלי שיש להוריד מהגרף כדי שלא יהיה מסלול בין v ל-w.

הוכחה. ניקח דוגמה נגדית מינימלית. יש רק k דרכים זרות, אבל יש k+1 נקודות שצריך להוציא.

ניקח דרכים זרות $B_1, B_2, \dots, B_k$. מ-v יש יציאה נוספת שאפשר להמשיכה לדרך כלשהי (אחרת נוציא את כל היציאות מ-v). נתחיל ביציאה הזאת ונבנה עוד דרך B_{k+1} שנתקעת בדרך B_i בנקודה x. בחרנו את $B_1, B_2, \dots, B_k, B_{k+1}$ כך שהמרחק בין x ל-w מינימלי.

מורידים את x מהגרף, ועדיין יש k דרכים זרות (כי צריך להוריד עוד k קודקודים בשביל הניתוק, ודוגמה הנגדית היא מינימלית). לדרכים אלה קוראים $T_1, T_2, \dots, T_k$, והן נבחרו כך שאנחנו משתמשים במספר מינימלי של קשתות שלא היו ב- $\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i$.

נסמן $A = \{t \in T_i\} \bigcup \{x\}$ קבוצת הקודקודים שבדרכים $T_1, T_2, \dots, T_k$ והקודקוד x.

עתה קיימת דרך B_j כך שהקשת הראשונה בה לא נמצאת על אף T_i (כיוון שיש k+1 דרכים כאלה עם קשת ראשונה שונה ורק k דרכים שתפוסות על ידי T_i) נסמן את הנק' הראשונה המשותפת ל-B_j ול-A ב-y. עתה יש שלוש אפשרויות, שנראה שכולן מובילות לסתירה:

y = w: סתירה למרחק המינימלי בין x ל-w בבחירה של $B_1, B_2, \dots, B_k, B_{k+1}$.

y = x: במקרה זה נמשיך את B_j בדרך הכי קצרה ל-w ונסמן את החיתוך הבא שלו עם A ב-z, אזי z קרוב יותר ל-w מאשר x ויש לנו k דרכים זרות $T_1, T_2, \dots, T_k$ ו-B_j עד x והמשך בדרך הכי קצרה ל-w עד ל-z שנחתכת איתן רק ב-z שוב בניגוד למינימליות המרחק בין x ל-w בבחירת $B_1, B_2, \dots, B_k,$ B_{k+1}.

$y \neq x, w$: אזי נראה את T_r הדרך שנחתכת ב-y, אזי יש בחלק של T_r בין u ל-y קשתות שאינן ב-$\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i$ (כי אחרת זו ההתחלה של איזשהו B_s ואז B_s ו-B_j נחתכים בנק' y בניגוד לכך שנק' החיתוך היחידה בין כל שתי דרכים B היא x) ועתה נחליף ב-T_r את החלק עד y בחלק של B_j עד y וקיבלנו עדיין k דרכים זרות, שלא עוברות ב-x ושמשתמשות בפחות קשתות שלא היו ב- $\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i$ בסתירה לבחירה ב-$T_1, T_2, \dots, T_k$.