כ"ט בשבט תשע"ב 22.2.2012

אולימפיאדה במתמטיקה, מחנה חורף

תחרות קבוצתית

1. שניים מבצעים מהלכים לפי התור: כל אחד בתורו מעביר ישר במישור (הוא יכול לבחור כל ישר שעדיין לא הועבר). המשחק מסתיים כאשר יש 13 ישרים בציור (אחרי המהלך השביעי של הראשון). הראשון מנצח אם בסוף המשחק המישור מחולק למספר אי-זוגי של חלקים, והשני מנצח אם המישור מחולק למספר זוגי של חלקים. למי יש אסטרטגיית ניצחון?

2. במשולש ABC הקודקודים חוברו לנקודות X,Y,Z על הצלעות הנגדיות על ידי הקטעים AX, BY, CZ. המעגל החוסם של XYZ חותך את הצלעות ב-6 נקודות שונות: את BC בנקודות U,X, את AC בנקודות V,Y ואת AB ב-W,Z. הוכח כי AU, BV, CW נפגשים בנקודה אחת.

3. הוכח שעבור a,b,c מספרים חיוביים מתקיים $\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{a+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 3$.

4. נתבונן בתמורות של המספרים מ-1 עד $n+1$. נסמן ב- I את מספר התמורות האי זוגיות ללא נק' שבת וב- Z את מס' התמורות הזוגיות ללא נק' שבת. הוכח כי $I-Z=\pm n$.

5. שחר ועמוס משחקים במשחק. שחר בוחר מספר טבעי N, ורושם אותו על הלוח. לאחר מכן, בכל סיבוב של המשחק, רושם עמוס מספר ***שמתחלק*** במספר האחרון שרשם שחר, ואז שחר רושם מספר ***שמחלק*** את המספר שרשם עמוס. אסור לאף אחד מהם לרשום מספר שכבר רשום על הלוח. מטרתו של שחר היא שהמשחק יימשך לנצח, בעוד שעמוס רוצה שהמשחק יסתיים לאחר מספר סופי של מהלכים. למי יש אסטרטגיה מנצחת?

6. א. במצולע קמור נצבעו N ריבועים זרים. האם בהכרח אפשר לחתוך את המצולע ל-N מצולעים קמורים, כך שכל חלק מכיל ריבוע צבוע אחד?
ב. במצולע קמור נצבעו N עיגולים זרים. האם בהכרח אפשר לחתוך את המצולע ל-N מצולעים קמורים, כך שכל חלק מכיל עיגול צבוע אחד?

7. יהי $P(x)$ פולינום עם מקדמים שלמים, מהצורה הבאה: $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+5772$
הוכח ש- $P\left(x^{2^k}\right)$ פולינום אי-פריק מעל שלמים אם $P(x)$ אי-פריק מעל שלמים.

8. במשולש ABC שני מעגלים חסומים מבחוץ משיקים להמשכים של צלע AB בנקודות U,T. הקטעים PT, QU הם הקטרים של המעגלים. הוכח כי הישרים AP, BQ נחתכים על המעגל החסום או על מעגל חסום מבחוץ.

9. גרף נקרא k-קשיר אם כאשר מסירים ממנו $k-1$ קודקודים כלשהם (ביחד עם צלעותיהם) הוא נשאר קשיר. כיווץ צלע זוהי הפעולה הבאה על גרף: מחליפים את קודקודי הצלע בקודקוד יחיד ששכניו הינם איחוד השכנים של קודקודי הצלע.
הוכח כי לכל גרף 3-קשיר בעל יותר מ-4 קודקודים ניתן לכווץ צלע כך שהגרף יישאר 3-קשיר.

10. נתון מצולע משוכלל בעל 18 צלעות. האם אפשר לחתוך אותו ל-18 מחומשים שווי-צלעות חופפים?

בהצלחה!