י בניסן תשע"ב 2.4.2012
תחרות קבוצתית, מחנה פסח

1. על בסיס AD של הטרפז ABCD נבחרה נקודה P. נתון שהיקפים של המשולשים PAB, PBC, PCD שווים. מצא את היחס בין הבסיסים של הטרפז.

2. א. אבי מחשב סכום של 100 מספרים טבעיים עוקבים (מ-N עד N + 99 כולל). מה הן שלוש הספרות האחרונות (הימניות) שיכולות להתקבל בסכום?
ב. בני מחשב סכום של חזקות שלישיות של 100 מספרים טבעיים עוקבים. מה הן שלוש הספרות האחרונות (הימניות) שיכולות להתקבל בסכום?

3. האם ניתן לחתוך מתומן קמור למצולעים בעלי 7 צלעות
א. שכולם קמורים ממש?
ב. שכולם קמורים ממש חוץ מאחד?

4. למצוא פונקציות מקבוצה של ממשיים חיוביים לעצמם שמקיימות
$f(x)\cdot f\left(y\cdot f(x)\right)=f(x+y)$ לכל $x,y>0$.

5. נקודה במישור נקראת שלמה, אם שתי קואורדינטות שלה שלמות. ישר במישור נקרא שלם אם הוא מכיל אינסוף נקודות שלמות. נתבונן במעגל שמרכזו נקודה שלמה ורדיוסו שווה 1. כמה ישרים שלמים משיקים לו?

6. דרך נקודה F שנמצאת מחוץ למעגל k מעבירים משיק FA (שמשיק ל-k ב-A) וישר ℓ, שחותך את המעגל בנקודות B ו-C (כאשר C על הקטע BF). המשיק ל-k ב-C חותך את FA בנקודה E. FX הינו חוצה זווית במשולש FAC (כלומר X על FC). הוכיחו שאם הנקודות B, E, X נמצאות על ישר אחד אז מכפלת האורכים של שתי צלעות המשולש ABC שווה לריבוע הצלע השלישית.

7. קטע נקרא שלם אם הוא מחבר שתי נקודות שלמות ואורכו 1. נגיד שמעגל חותך קטע, אם הוא עובר דרך נקודה פנימית של הקטע. מהו המספר המרבי של הקטעים השלמים שניתן לחתוך באמצעות מעגל שקוטרו $\sqrt{50}$?

8. בהינתן $a,b,c>0$, הוכיחו כי $\sqrt{\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}}\geq 3$.

9. האם קיים N טבעי, עבורו אפשר לשכן את מכון ויצמן בקוביית יחידה N-ממדית? אסור לכווץ\לקפל.

10. המספרים $x_1,x_2,...,x_n>0$, ונסמן $x_{n+k}=x_k$ עבור $k=1,2$.
הוכיחו שמתקיים אי-שוויון $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\leq\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x_i^3}{x_{i+1}x_{i+2}}\right)$.

בהצלחה!