אי-שוויונים מסוג שור

1. $a,b,c>0$. הוכח כי $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{a+b}{c^2+ab}+\frac{a+c}{b^2+ac}+\frac{b+c}{a^2+bc}$.

2. $a,b,c\ge 0$, $ab+bc+ca\ne 0$. הוכח כי

א. $\frac{1}{a+b+c}\le\frac{a^3}{\left(2a^2+b^2\right)\left(2a^2+c^2\right)}+\frac{b^3}{\left(2b^2+a^2\right)\left(2b^2+c^2\right)}+\frac{c^3}{\left(2c^2+a^2\right)\left(2c^2+b^2\right)}$.

3. $a,b,c\ge 0$, $ab+bc+ca\ne 0$. הוכח כי

ב. $\frac{a+b+c}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\le\frac{a^3}{\left(2a^2+b^2\right)\left(2a^2+c^2\right)}+\frac{b^3}{\left(2b^2+a^2\right)\left(2b^2+c^2\right)}+\frac{c^3}{\left(2c^2+a^2\right)\left(2c^2+b^2\right)}$.

4. $a,b,c\ge 0$. הוכח כי $\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+a)(2b+c)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\le\frac{1}{3}$.

5. $a,b,c>0$. הוכח כי $\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}$.

שיטת SS ועוד

0. $a,b,c>0$. הוכח כי

א. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+a}{c+a}+\frac{c+b}{a+b}$. **ב.** $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{b+c}{a+c}+\frac{c+a}{b+a}+\frac{a+b}{c+b}$.

1. $a,b,c>0$. הוכח כי $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 4$.

2. $a,b,c>0$. הוכח כי $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 5$.

(התוצאה המכסימלית כאן: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 3+k$ עבור $k=3\sqrt[3]{4}-2$).

3. $a,b,c>0$. הוכח כי $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{5abc}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}\ge\frac{23}{6}$.

4. $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$. הוכח כי $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)(a+b+c)\ge 9$.

5. $a,b,c>0$, $a+b+c=1$. הוכח כי $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}\ge 2\sqrt{ab+bc+ca}$.

6. $a,b,c>0$, $a+b+c=1$.

הוכח כי $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}\ge\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+2\sqrt{3abc}}$.

מיכאל רוזנברג, 19 בפברואר 2012.