אולימפיאדה זוטא כיתה ז' - פתרונות

תשע"ב – שלב א'

1. כדי שמספר יתחלק ב-15, הוא חייב להתחלק ב-3 וגם ב-5.

   אז יש שתי אפשרויות לספרת היחידות: 0 או 5.

   אם ספרת היחידות היא 0, מקבלים 140*. סכום הספרות יתחלק ב-3 אם ספרת האלפים תהיה 1, 4 או 7.

   אם ספרת היחידות היא 5, מקבלים 145*. סכום הספרות יתחלק ב-3 אם ספרת האלפים תהיה 2, 5 או 8.

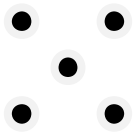
   <u>תשובה סופית</u>: יש 6 מספרים כאלה: 1140, 4140, 7140, 2145, 5145, 8145.

2. נבחן שלוש אפשרויות:

   - מיכל ושלומי צדקו, ודוד טעה. אז יש בכיתה 31 ילדים או יותר (לפי מיכל), אבל 30 ילדים או פחות (כי דוד טעה). לא יכול להיות.
   - דוד ושלומי צדקו, ומיכל טעתה. אז יש בכיתה 31 או 32 ילדים (לפי דוד ושלומי). במקרה כזה מיכל צודקת גם היא – יש לפחות 31 ילדים בכיתה. סתירה לנתון שאחד הילדים טעה.
   - דוד ומיכל צדקו, ושלומי טעה. אז יש בכיתה 31 ילדים או יותר (לפי דוד ומיכל), ו-33 ילדים או יותר (כי שלומי טעה). זה מסתדר: בכיתה יש 33 ילדים או יותר, ושלומי טעה.

   <u>תשובה סופית</u>: שלומי טעה.

3. הנה 5 נקודות בצורת ריבוע עם נקודה באמצע:



4. המארז של שלמה מורכב מ-27=3x3x3 קוביות, כל אחת בגובה 2 ס"מ. לכן הגובה הכולל של המגדל שלו הוא 54=27x2 ס"מ.

המארז של אבשלום מורכב מ-216=6x6x6 קוביות, כל אחת מהן בגובה 1 ס"מ. לכן הגובה הכולל של המגדל שלו הוא 216 ס"מ.

<u>תשובה סופית</u>: המגדל של אבשלום גבוה פי 4 מהמגדל של שלמה.

5. לרגע השאלה נראית לא הגיונית: אם לפני 6 שנים הממוצע היה 4 שנים, אז עכשיו הוא אמור להיות 10 שנים ולא 9. התעלומה נפתרת בקלות אם מניחים שהבן הצעיר בן פחות מ-6 שנים, כלומר הוא לא היה קיים כשהממוצע היה 4.

   לפני 6 שנים סכום הגילאים של 4 הילדים הגדולים היה 16=4x4 (כך שהממוצע היה 4). לכן היום סכום הגילאים של 4 הילדים הגדולים הוא 40=16+4x6. מצד שני, סכום גילאי כל הילדים הוא 45 (כך שממוצע החמישה יהיה 9). לכן גילו של הבן הצעיר הוא 5.

   לא יכול להיות יותר מבן אחד שגילו קטן מ-6: אם היו שני ילדים קטנים, זה אומר שסכום גילאי 3 הגדולים היה 12=4x3 לפני 6 שנים, והיום הסכום הוא 30=12+3x6. מצד שני, סכום גילאי כל הילדים הוא 45 ולכן סכום גילאי שני הקטנים הוא 15. זו סתירה לכך ששניהם קטנים מ-6. יש הסבר דומה למקרה בו יש יותר ילדים קטנים.

   <u>תשובה סופית</u>: הבן הצעיר בן 5.

6. רעידת אדמה בעוצמה 7.5 חזקה פי 10 מרעידת אדמה בעוצמה 6.5, שחזקה פי 10 מרעידה בעוצמה 5.5 וכו'. לכן רעידת אדמה בעוצמה 7.5 חזקה פי 10 בחזקת 5 מרעידת אדמה בעוצמה 2.5.

   <u>תשובה סופית</u>: רעידת האדמה בעוצמה 7.5 חזקה פי 100,000 מרעידת אדמה בעוצמה 2.5.

אולימפיאדה זוטא כיתה ח' - פתרונות

תשע"ב – שלב א'

1. הכבשים יאכלו בשנה 366 x 2 x 50,000 = 36,600,000 עצים (שימו לב ש-2012 היא **<u>שנה מעוברת</u>**, בה יש 366 ימים). כדי ש-80% מהעצים הנטועים ישרדו, צריך לנטוע פי 5 עצים ממה שהכבשים אוכלות: 5 x 36,600,000 = 183,000,000 עצים.

   <u>תשובה סופית</u>: צריך לנטוע 183,000,000 עצים.

2. כיוון שענת הלכה פי 2 לאט יותר מאליסה, הבנות נפגשו בשליש הדרך (קרוב יותר לבית של ענת). בדרך חזרה, לאליסה היתה דרך ארוכה פי 2 מהדרך של ענת, והיא הלכה פי 2 לאט יותר מענת. לכן בסך הכל לקח לאליסה פי 4 זמן יותר מהזמן שלקח לענת להגיע הביתה: 4x5=20 דקות.

   <u>תשובה סופית</u>: אליסה והאח הקטן חזרו הביתה בשעה 18:20.

3. להרקולס יש שתי אפשרויות: להוריד 9 ראשים, או להוסיף 3 ראשים (זה בעצם מה שהחרב השניה עושה). כלומר בכל מקרה השארית של מספר הראשים הכולל בחלוקה ב-3 לא תשתנה לאורך כל הדרך, ותישאר 2. לכן מספר הראשים הקטן ביותר שיכול להישאר הוא 2.

   עכשיו נראה איך הרקולס יכול להביא למצב של 2 ראשים: לדוגמא, הוא ישתמש בחרב השניה פעמיים (כך שיהיו לדרקון 56 ראשים), ואז ישתמש בחרב הראשונה 6 פעמים (ואז ישארו לדרקון 56-9x6 = 2 ראשים). [הערה: יש עוד דרכים להגיע ל-2 ראשים].

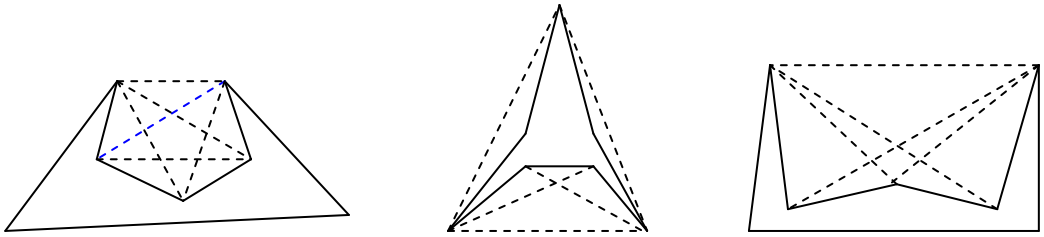
   <u>תשובה סופית</u>: הרקולס צריך להשתמש בחרב השניה פעמיים ובחרב הראשונה 6 פעמים, ואז ישארו לדרקון 2 ראשים.

4. המספר פריק, לכן הוא חייב להתחלק בשני מספרים ראשוניים לפחות. המספר הראשוני הקטן ביותר שמותר להשתמש בו הוא 11, לכן המספר הקטן ביותר שמקיים את התכונה הוא 11x11 = 121.

   <u>תשובה סופית</u>: המספר הוא 121.

5. דוגמאות לפתרונות אפשריים: **(קיימים פתרונות נוספים)**

הקווים המקווקוים הם אלכסונים מחוץ למשובע.



6. לרגע השאלה נראית לא הגיונית: אם לפני 9 שנים הממוצע היה 3 שנים, אז עכשיו הוא אמור להיות 12 שנים ולא 10. התעלומה נפתרת בקלות אם מניחים שהבת הצעירה בת פחות מ-9 שנים, כלומר היא לא היתה קיימת כשהממוצע היה 3.

נתבונן בשלושה מקרים:

א. יש בדיוק ילדה אחת בת פחות מ-9.

אז לפני 9 שנים סכום גילאי 3 הבנות הגדולות היה 9=3x3 (כך שהממוצע היה 3), ולכן עכשיו סכום גילאי 3 הבנות הוא 9+3x9 = 36. מצד שני, סכום גילאי כל הבנות הוא 4x10 = 40 (כך שממוצע הארבע הוא 10), לכן גילה של הילדה הקטנה הוא 4.

ב. יש שתי בנות שגילן קטן מ-9.

אז לפני 9 שנים סכום גילאי 2 הבנות הגדולות היה 6=3x2 (כך שהממוצע היה 3), ולכן עכשיו סכום גילאי 2 הבנות הוא 6+2x9 = 24. מצד שני, סכום גילאי כל הבנות הוא 4x10 = 40 (כך שממוצע הארבע הוא 10), לכן סכום הגילאים של שתי הילדות הקטנות הוא 40-24 = 16. כיוון ששתיהן בנות פחות מ-9, בהכרח הבנות תאומות והן בנות 8.

ג. יש 3 בנות שגילן קטן מ-9.

אז לפני 9 שנים היתה רק ילדה אחת, והיא היתה בת 3. היום היא בת 12. סכום גילאי כל 4 הבנות הוא 40 (כפי שראינו קודם), לכן סכום גילאי 3 הבנות הצעירות הוא 28. אך שלושתן בנות פחות מ-9, לכן סכום גילאיהן חייב להיות קטן מ-27 -> סתירה. מקרה כזה אינו אפשרי.

<u>תשובה סופית</u>: יש שתי אפשרויות: או שהבת הקטנה היא בת 4, או שיש שתי ילדות קטנות בנות 8.

אולימפיאדה זוטא כיתה ט' - פתרונות

תשע"ב – שלב א'

1. מחיר התיק הנוכחי הוא 84% ממחירו המקורי, כלומר: $\frac{(100+X)\cdot(100-X)}{100\cdot100}=0.84$.
מפשטים את המשוואה בעזרת נוסחת כפל מקוצר ומקבלים: $100^2-X^2=8400$.

אז $X^2=1600$, כלומר $X=40$ (X חייב להיות חיובי, כמובן).

אפשר גם לנחש את התשובה: 40%, ולראות שאם מוסיפים למחיר 40% ואז מורידים 40% מקבלים ירידה כוללת של 16%.

<u>תשובה סופית</u>: X=40%.

2. יש שלושה סוגים של מספרים זרים קרובים:

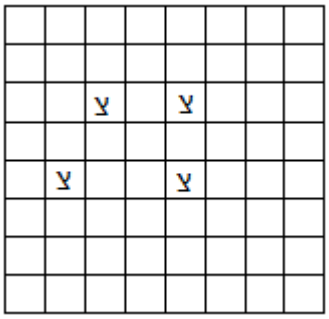
א. מספרים זהים – תמיד יש להם גורם משותף (המספר עצמו). המקרה היחיד בו הגורם המשותף היחיד הוא 1 הוא זוג המספרים (1,1).

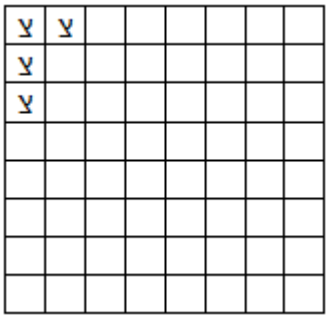
ב. מספרים עוקבים – אלה תמיד זרים, כי לא יכול להיות להם שום גורם משותף. יש 99 זוגות כאלה בין 1 ל-100: (99,100) ,… ,(3,4) ,(2,3) ,(1,2).

ג. מספרים שההפרש בינהם הוא 2 – אם שניהם זוגיים הם בוודאי לא זרים, אך אם שניהם אי-זוגיים הם בוודאות זרים. יש 49 זוגות כאלה בין 1 ל-100: (1,3), (3,5), (5,7), … ,(97,99).

<u>תשובה סופית</u>: יש 149 זוגות מספרים זרים קרובים בין 1 ל-100.

3. הצריחים עומדים כמתואר בציור ומאיימים על 34 משבצות, לדוגמא:





ישנם פתרונות רבים נוספים.

4. להרקולס יש שתי אפשרויות: להוריד 33 ראשים, או להוסיף 11 ראשים (זה בעצם מה שהחרב השניה עושה). כלומר בכל מקרה השארית של מספר הראשים הכולל בחלוקה ב-11 לא תשתנה לאורך כל הדרך, ותישאר 9. לכן מספר הראשים הקטן ביותר שיכול להישאר הוא 9.

   עכשיו נראה איך הרקולס יכול להביא למצב של 9 ראשים: לדוגמא, הוא ישתמש בחרב השניה פעם אחת (כך שיהיו לדרקון 2022 ראשים), ואז ישתמש בחרב הראשונה 61 פעמים (ואז ישארו לדרקון 2022-33x61 = 9 ראשים). [הערה: יש עוד דרכים להגיע ל-9 ראשים].

   <u>תשובה סופית</u>: הרקולס צריך להשתמש בחרב השניה פעם אחת ובחרב הראשונה 61 פעמים, ואז ישארו לדרקון 9 ראשים.

5. אפשר לחלק את כל הפלינדרומים התלת-ספרתיים לזוגות, כך שסכום כל זוג הוא 1100: אם X הוא פלינדרום, אז גם 1100-X הוא פלינדרום (זה בעצם אומר שצריך "להשלים" את ספרת היחידות ל-10, את ספרת העשרות ל-9 ואת ספרת המאות ל-10, לדוגמא 353 ו- 747).

   הממוצע של כל זוג הוא 1100/2 = 550, וזהו גם הממוצע של כל הפלינדרומים יחד.

   <u>תשובה סופית</u>: הממוצע הוא 550.

6. א. אפשר לפרוש את הקוביה ולראות שהמסלול הקצר ביותר הוא האלכסון של מלבן בגודל 1x2 ס"מ. לפי משפט פיתגורס אורך האלכסון הוא $\sqrt{5}$.

   ב. כל מסלול כזה מתחיל בפאה שסמוכה למיקום ההתחלתי של הנמלה (יש 3 פאות כאלה), ואז הנמלה יכולה לבחור בין שתי דרכים סימטריות "לעקוף" את הקודקוד הנגדי של הפאה. סה"כ יש 6 מסלולים שונים.

<u>תשובה סופית</u>: אורך המסלול הקצר ביותר הוא $\sqrt{5}$, ויש 6 מסלולים שונים כאלה.

בציור מתוארים שני מסלולים כאלה. יתר המסלולים לא נראים כאן.

