1. תוחלת של משתנה מקרי X, $E(X)$, מוגדרת בתור $\sum_{i\in I} p_i x_i$[1] כאשר $\{x_i\}_{i\in I}$ אוסף הערכים שX מקבל, ו$Pr(X=x_i)=p_i$. במילים אחרות - זה הוא הממוצע המשוקלל של X. השונות מוגדרת בתור $\sum_{i\in I} p_i(x_i-Ex)^2$ (הממוצע המשוקלל של המרחק של X מהתוחלת בריבוע).

   א. עבור משתנה מקרי X שמקבל רק ערכים שלמים אי-שליליים נגדיר $f(t)=\sum_{n\geq 0} Pr(X=n)t^n (=E(t^X))$. הביעו באמצעות f את $E(X), Var(X)$.

   ב. חשבו את התוחלת והשונות של המשתנים המקריים הבאים:

   - יהי $p\in[0,1]$. משתנה מקרי גיאומטרי $G(p)$ מוגדר באופן הבא: נתון מטבע עם הסתברות p ל'הצלחה' והסתברות $1-p$ ל'כישלון'. מטילים את המטבע עד שמקבלים 'הצלחה'. הערך של המשתנה המקרי הוא מספר ההטלות עד ההצלחה (כולל ההטלה האחרונה).
   - יהי $p\in[0,1]$. משתנה מקרי בינומי $Bin(n,p)$ מוגדר באופן הבא: מטילים את המטבע (המוגדר כמו בסעיף הקודם) n פעמים. הערך של המשתנה המקרי הוא מספר ההטלות שנתנו 'הצלחה'.

2. (IMO 2008/5) נתונים מספרים טבעיים n,k המקיימים: $k\geq n$ ו$k\equiv n(2)$. נתונות $2n$ נורות, ממוספרות מ1 עד $2n$. בהתחלה, כולן כבויות. בכל צעד, מותר להדליק נורה כבויה או לכבות נורה דלוקה.

   - נסמן בN את מספר הדרכים לגרום לn הנורות הראשונות לדלוק, ולn הנורות האחרונות להיות כבויות - בk צעדים.
   - נסמן בM מספר דומה, רק שבכל k הצעדים לא נגענו בn הנורות האחרונות.

   חשבו את $\frac{N}{M}$ באמצעות פונקציות יוצרות. (רמז: מה אפשר להגיד על היחס בין $f(x)[x^k]$ ו-$f(cx)[x^k]$, עבור קבוע c כלשהו?)

3. (IMO 1995\6) פתרו באמצעות פונקציות יוצרות: כמה תתי קבוצות של $\{1,2,\cdots,2p\}$ בגודל p (ראשוני אי-זוגי) ישנן, שסכומן מתחלק בp?

4. (D. J. Newman) הוכיחו שלא ניתן לכתוב את $\mathbb{N}$ (המספרים הטבעיים, לא כולל 0) כאיחוד זר של סדרות חשבוניות עם הפרשים שונים. כלומר אם d_i, a_i מספרים טבעיים עבור $1\leq i\leq k$, אז שיוויון $\mathbb{N}=\cup_{i=1}^{k}\{a_i+nd_i | n\in\mathbb{N}\}$ גורר שיש שני d_i שווים. האם אפשר לדרוש תנאים חלשים יותר על ההפרשים d_i?

5. פעולות על פונקציות יוצרות:

   - הוכיחו שסכום (נקודתי) וכפל (נקודתי) של 2 סדרות נסיגה לינאריות מקיים גם הוא נוסחת נסיגה לינארית. כפל זה נקרא 'כפל Hadamard'.

[1] לא יהיו לנו בעיות של התכנסות כי $x_i\geq 0$ במקרים שלנו.

- קונבולוציה של 2 סדרות $\{a_n\}_{n\geq 0}, \{b_n\}_{n\geq 0}$ מוגדרת בתור הסדרה : $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$. הוכיחו שקונבולוציה של 2 סדרות נסיגה לינאריות מקיימת גם היא נוסחת נסיגה לינארית.
- נניח שהמקדמים של נוסחאות הנסיגה בסעיפים הקודמים הם שלמים. הוכיחו שהמקדמים של הסדרות שיצרנו (חיבור, כפל, קונבולוציה) שלמים גם הם.

הערה: אם a_n, b_n סדרות נסיגה לינאריות עם מקדמים שלמים כך שa_n/b_n שלם לכל n, אז המנה הזו מקיימת נוסחת נסיגה לינארית עם מקדמים שלמים. זה הוא משפט המנה של Hadamard, וההוכחה שלו עוברת דרך מספרים p־אדים.

6. (Euler) יהי n טבעי. הראו, באמצעות פונקציות יוצרות, שמספר החלוקות של n שלא משתמשות באותו מספר פעמיים שווה למספר החלוקות של n המשתמשות רק במספרים אי־זוגיים. האם אתם יכולים להוכיח זאת ישירות?

7. נוסחת Dobinsky: בהרצאה ראינו שהפונקציה היוצרת האקספוננציאלית של מספרי Bell היא e^{e^x-1}. הוכיחו את הנוסחה הבאה: $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}$. (נוסחה זו מהווה בסיס לחלק מהחישובים היעילים של מספרי Bell).

8. (קשה) נוסחת Cayley: הוכיחו שמספר העצים על n קודקודים ממוספרים הוא n^{n-2}.