תרגיל משוואות פונקציונליות

1) כמה פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מקיימות $f(x^3+x)\le x\le f(x)^3+f(x)$ לכל $x\epsilon\mathbb{R}$?

2) מצא את כל הפונקציות f מ- $\mathbb{Q}$ ל- $\mathbb{Q}$ עבורן לכל x,y רציונאליים מתקיים:

$$5772\cdot f(x)f(y)+f(x+y)=2012\cdot f(xy)+f(x)+f(y)$$

3) נסמן ב- $\mathbb{R}_+$ את ממשיים אי-שליליים. מצא את כלה פונקציות f מ-$\mathbb{R}_+$ ל-$\mathbb{R}_+$ אשר מקיימות:

$$f\big(f(x)\big)+2f(x)=3x$$

לכל $x\epsilon\mathbb{R}_+$

4) מצא את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שעבורן מתקיים

$$\big(f(x)+f(y)\big)\big(f(u)+f(v)\big)=f(xu-yv)+f(xv+yu)$$

לכל x,y,u,v ממשיים.

5) למצוא את כל הפונקציות ממשיים לממשיים שעבורם מתקיים אי-שוויון הבא:

$$f(x+y)f(x)\ge f(x)^2+xy$$

לכל x,y ממשיים.

6) מצא את כל הפונקציות f ממספרים ממשיים חיוביים לעצמם שמקיימות:

$$f(x)f(y)=2f\big(x+yf(x)\big)$$

לכל x,y ממשיים חיוביים.