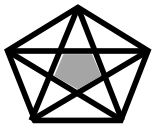
דף שאלות – בעיות מקרי קיצון

1) הוכח שאין מחומש, שכל קודקודיו נמצאים על השריג (קודקודיו בקואורדינטות בעלות ערכים שלמים בשני הצירים) שכל צלעותיו שוות (הערה: מחומש שכל צלעותיו שוות אינו בהכרח משוכלל)



2) במחומש קמור שכל קודקודיו נמצאים על השריג העבירו את כל האלכסונים האפשריים ליצירת פנטגראם, הוכח שהמחומש הפנימי מכיל נק' מהשריג.

3) כמות סופית של נקודות במישור צבועות ב-4 צבעים, כאשר יש נקודה אחת לפחות מכל צבע. אף 3 מהנקודות הללו לא נמצאות על ישר אחד. הוכח כי אפשר למצוא לפחות 3 משולשים (אולי נחתכים) כך שלכל משולש יש קודקודים צבועים ב-3 צבעים שונים, ובתוכו אין אף נק' צבועה.

4) בגרף מישורי כל הקשתות צבועות באחד משלושה צבעים (לבן, אדום וכחול) ומכל נק' יוצאות בדיוק 3 קשתות, אחת מכל צבע. ניקח נק' כלשהי ונראה איך הקשתות סביבה מסודרות עם כיוון השעון, אם הסדר הוא לבן, אדום, כחול, נקרא לנק' זו טובה, ואם הסדר הוא לבן, כחול, אדום, נקרא לנק' זו רעה. הוכח שההפרש בין מס' הנק' הטובות לרעות מתחלק ב-4.

5) בגרף פשוט כלשהו A, התת גרף המלא (כלומר שכל שני קודקודים שלו מחוברים) הגדול ביותר הוא בעל מס' זוגי של קודקודים. הוכח כי אפשר לחלק את הגרף לשני גרפים זרים A_1, A_2 $\left(V_A = V_{A_1} \cup V_{A_2}, \phi = V_{A_1} \cap V_{A_2}\right)$ כך שגודל התת גרף המקסימלי בכל אחד מהם הוא זהה.

6) (משפט Dillworth –) יש אי של קניבלים ובו הקניבלים (בהתאם לשמם) נוטים לאכול איש את רעהו, קניבל אחד יכול לאכול כמה קניבלים שהוא רוצה, וגם כל קניבל יכול להיאכל ע"י כמה אנשים שונים. כמובן שאם משה אוכל את יוסי, לאחר שיוסי אכל את דני (כמובן שזה לא יכול לקרות לפני – חשבו למה) יחשב הדבר כאילו משה גם אכל קצת מדני. נקרא לקב' קניבלים חברים אם איש מהם אינו אכל את אף אחד מהאחרים (גם אצל הקניבלים זה נחשב ללא מנומס) כמובן שקב' החברים לא חייבת להיות בחיים ויכולה להיות בבטן של קניבלים אחרים (אין גם מניעה ששניים מהם ייאכלו ע"י אותו אדם או יאכלו את אותו אדם). נקרא לקב' קניבלים שרשרת אם לכל זוג בקב' אחד מהם אכל באיזשהו שלב את השני. הוכח כי באי בו קב' החברים הגדולה ביותר היא מגודל K ניתן לחלק אותו ל-K שרשראות.

7) יהי G גרף, v,w נק' לא סמוכות בגרף. הוכח כי מס' המסלולים הזרים בזוגות (כלומר לכל 2 מהם אין שום קודקוד משותף מלבד v,w) בין v ל-w זהה למס' הנק' המינימלי שיש להוריד מהגרף כדי שלא יהיה מסלול בין v ל-w.