שאלות על זהויות

דף 1

1. חשב את $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$ ללא מחשבון.

2. אילו מהמספרים

$$A=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 \quad , \quad B=\sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2005}}+\sqrt{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{7}\right)^{2005}},$$

$$C=\frac{1}{6\sqrt{2}-2\sqrt{15}}+\frac{1}{6\sqrt{2}+2\sqrt{15}} \quad , \quad D=\sqrt{1003+\sqrt{2005}}-\sqrt{1003-\sqrt{2005}}$$

שווים זה לזה?

3. פשט את הביטוי: $\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{100^3-1}{100^3+1}$.

4. הוכח כי $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}$.

5. הוכח כי $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

6. הוכח כי $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1=\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\ldots+\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

7*. הוכח כי $\frac{2003}{2}-\frac{2002}{3}+\frac{2001}{4}-\ldots-\frac{2}{2003}+\frac{1}{2004}=\frac{1}{1003}+\frac{3}{1004}+\ldots+\frac{2003}{2004}$.

8. חשב את $\frac{729}{1729}+\frac{729\cdot 728}{1729\cdot 1728}+\frac{729\cdot 728\cdot 727}{1729\cdot 1728\cdot 1727}+\ldots$.

9. חשב את $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}$.

10. חשב את $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

שאלות על זהויות
דף 2

1. פשט את הביטוי: $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}}+\frac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{25}}$.

2. פשט את הביטוי: $\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}+\frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

3. מיין את המספרים A, B, C לפי הגודל

$$A=2$$
$$B=\frac{8000}{7999}\cdot\frac{7997}{7996}\cdot\frac{7994}{7993}\cdot\ldots\cdot\frac{1001}{1000}$$
$$C=\sqrt[3]{\sqrt{576}-\sqrt{575}+\sqrt{573}-\sqrt{572}+\sqrt{570}-\sqrt{569}+\ldots+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

4. הוכח כי $\sum_{cyc}\frac{\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)}{\left(a+c\right)\left(b+c\right)}=a^2+b^2+c^2$.

5. חשב את $\sum_{k=1}^{N}k^3$.

6. חשב את $\sum_{k=1}^{N}\left(k^5+k^7\right)$.

7. חשב את $\arctan\left(\frac{1}{2\cdot1^2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{2\cdot2^2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{2\cdot3^2}\right)+\ldots+\arctan\left(\frac{1}{2\cdot n^2}\right)$.

8*. חשב את $\frac{1}{f_1f_3}+\frac{1}{f_3f_5}+\frac{1}{f_5f_7}+\frac{1}{f_7f_9}+\ldots$, כאשר $f_1=f_2=1\ ;\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$.