תרגיל אליפסות

גישה גיאומטרית

1. נתון גליל מעגלי ישר. הוכח כי כל חתך מישורי שלו הוא אליפסה, שהמוקדים שלה הן נקודות השקה של מישור החתך עם הכדורים.

2. הוכח שחתך החרות שחותך את שני השרוולים של חרות מעגלי ישר הוא מקום גיאומטרי של נקודות שהפרש המרחקים מהם לשני מוקדים הינו קבוע, כאשר הנקודות הן נקודות ההשקה של כדורי דנדלין עם מישור החתך.

3. הוכח כי כל חתך של חרות מעגלי ישר שאינו מעגל אפשר לתאר בתור מקום גיאומטרי של נקודות במישור, שהמרחק מהם לנקודה ספציפית (המוקד) חלקי המרחק מהם לישר ספציפי (המדריך) הינו קבוע. כיצד קשורים המוקד והמדריך לכדור דנדלין?

4. נסח והוכח ללא חישוב את התכונה האופטית של פרבולה והיפרבולה.

5. לאליפסה והיפרבולה באותו מישור יש את אותם המוקדים. הוכח כי הם מאונכים.

6. F הינו מוקד של שניונית. מעבירים דרך F ישר, שחותך את השניונית בשתי נקודות B,A, כך שהקטע AB מכיל את F. הוכח כי הגודל $\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}$ אינו תלוי בשיפוע. (האם התנאי שהקטע AB מכיל את F הוא חיוני?)

7. לשתי אליפסות שונות יש מוקד אחד משותף. הוכח שיש להם לכל היותר שתי נקודות חיתוך.

8*. (משפט סלמון) כדור ביליארד נקודתי נע ללא איבוד אנרגיה על פני שולחן ביליארד אליפטי. הוכח שכל הקטעים במסלול שלו מקיימים את אחד מבין 3 תנאים (אותו תנאי מתקיים לכל הקטעים):
א. כולם משיקים לאליפסה בעלת אותם מוקדים.
ב. כולם עוברים דרך אחד המוקדים.
ג. אם נמשיך את כל הקטעים לישרים, אז כולם משיקים להיפרבולה בעלת אותם מוקדים.

גישה אנליטית

1. הוכח את משפט אפולוניוס: למשפחה של מיתרים מקבילים בשניונית המרכזים נמצאים על קו אחד.

2. הוכח שכל חתך של שניונית דו-מימדית (משטח שנתון על ידי משוואה ריבועית) הינו שניונית מישורית.

3. לשתי פרבולות הצירים מאונכים. הפרבולות נחתכות ב-4 נקודות: A, B, C, D.
א. הוכח כי הנקודות שייכות למעגל אחד.
ב. הוכח שמרכז הכובד של 4 הנקודות נמצא בנקודת חיתוך של שני הצירים.
ג. אינסוף נקודות במישור נמצאות במרחקים שלמים זו מזו. הוכח כי הן על ישר אחד.

4. על היפרבולה ישרה $xy=1$ נמצאות נקודות K, M סימטריות ביחס לראשית. מעגל שעובר דרך K ומרכזו M חותך את ההיפרבולה בנקודות A, B, C. הוכח כי המשולש ABC שווה צלעות.

5. הוכח שדרך כל 5 נקודות במצב כללי (אף שלוש לא על ישר אחד) עוברת שניונית אחת ויחידה. (מה אם הם לא במצב כללי?)

6. הוכח שלכל 5 ישרים במצב כללי (אגב, מה זה מצב כללי?) יש שניונית אחת ויחידה שמשיקה לכולן.

7. נתונה אליפסה (או שניונית כללית) ועליה נקודות A, B. לכל נקודה X על אותה אליפסה נסמן ב-α,β את מרחקים מנקודה X למשיקים של האליפסה בנקודות A, B, ונסמן ב-γ את המרחק מ-X לישר AB. הוכח כי $\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}$ לא תלוי ב-X.

8*. לאליפסה נתונה מעבירים שני משיקים מקבילים (בכיוון כלשהו). מעגל משיק לאליפסה ולשני ישרים. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים מסוג זה.