חישובים גיאומטריים עם מספרים מרוכבים - דף נוסחאות

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=-\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}\Leftrightarrow AB\perp CD \quad , \quad \frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}\Leftrightarrow AB\|CD$$

$$\left|\begin{pmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{pmatrix}\right|=0\Leftrightarrow \frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}\Leftrightarrow \text{ על ישר אחד } A,B,C$$

$$e^{i\phi}\frac{a-c}{|a-c|}=\frac{b-c}{|b-c|}=\Leftrightarrow \phi=\measuredangle ACB$$

$$\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{(d-c)\overline{(b-a)}-\overline{(d-c)}(b-a)}{2i\cdot|d-c|\cdot|b-a|}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{(d-c)\overline{(b-a)}+\overline{(d-c)}(b-a)}{2\cdot|d-c|\cdot|b-a|}$$

$$[A,B;C,D]=\frac{a-c}{b-c}\Big/\frac{a-d}{b-d}\in\mathbb{R}$$ נקודות על מעגל אחד אם ורק אם

$$\frac{i}{4}\left|\begin{pmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{pmatrix}\right|$$ שטח מכוון של ABC שווה

תכונות מעגל יחידה (כאשר AB מיתר)

א. $\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=-ab$.

ב. משוואת המיתר $\overline{z}=\frac{a+b-z}{ab}$.

ג. נקודת מפגש המשיקים $\frac{2ab}{a+b}$.

ד. עקב האנך מ- C כללי למיתר הוא $\frac{a+b+c-ab\overline{c}}{2}$.

ה. שיקוף של נקודה Z כלשהי ביחס למיתר AB הוא $a+b-ab\overline{z}$.

ו. נק' חיתוך עם מיתר נוסף CD היא $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

משיק בנקודה P על המעגל שמרכזו ב- 0 הוא $\overline{p}z+p\overline{z}=2p\overline{p}$

עבור משולש שקודקודיו $0,A,B$ מפגש הגבהים הוא $\frac{(\overline{a}b+a\overline{b})(a-b)}{a\overline{b}-\overline{a}b}$ ומרכז המעגל החוסם הוא

$$\frac{ab(\overline{a}-\overline{b})}{\overline{a}b-a\overline{b}}$$

חישובים גיאומטריים עם מספרים מרוכבים – תרגילים בסיסיים

בדף תרגיל זה, המילה "מצא" משמעותה "רשום נוסחה ע"י מספרים מרוכבים". נקודות מסומנות באותיות גדולות (A, B, X, P) ומספרים מרוכבים מתאימים באותיות קטנות מתאימות (a, b, x, p).

1. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו 0.
א. מצא את נקודת מפגש הגבהים.
ב. מצא את מרכז המעגל החוסם של המשולש האמצעי.
ג. הסק את תכונות הישר של אוילר.

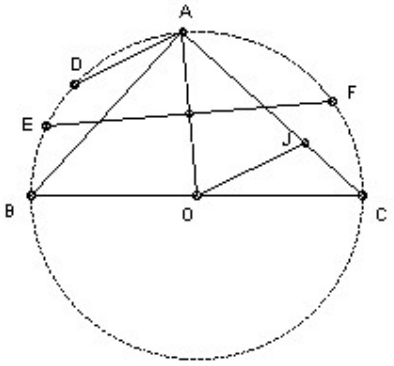
2. א. הוכח את נוסחאות ד', ה' בתכונות של מעגל היחידה מדף הנוסחאות.
ב. הסק את הטענה הבאה. יהי ℓ ישר, ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c שיקופים שלו יחסית לצלעות המשולש. אזי הישרים ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם ℓ עובר דרך נקודת מפגש הגבהים של המשולש, ובמקרה זה נקודת המפגש של ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c נמצאת על המעגל החוסם.
ג. תהי P נקודה במישור. אז השיקופים של P יחסית לצלעות המשולש נמצאים על ישר אחד אם ורק אם P על המעגל החוסם של המשולש, ובמקרה זה, הישר עובר דרך נקודת מפגש הגבהים של המשולש.

3. א. עבור משולש ABC שחסום במעגל היחידה שמרכזו ב-0, הוכח שקיימים מספרים מרוכבים u, v, w עבורם מתקיימים שני התנאים הבאים:
(1) $a = u^2,\ b = v^2,\ c = w^2$
(2) אמצעי הקשתות של המעגל החוסם בין שני קודקודים שלא מכילות את הקודקוד השלישי הם $-vw,\ -wu,\ -uv$.
ב. מצא בעזרת u, v, w את מרכז המעגל החסום.

4. נתונים משולשים ABC, A'B'C' שהם פרספקטיביים ביחס לראשית. זאת אומרת שקיימים מספרים ממשיים α, β, γ כאלה שקודקודי המשולש הראשון a, b, c ושל השני $\alpha a, \beta b, \gamma c$. נניח ש-$\alpha, \beta, \gamma$ שונים בזוגות (כלומר אף שתי צלעות מתאימות לא מקבילות).
א. מצא את נקודות החיתוך של צלעות מתאימות.
ב. הסק את משפט דזארג.

5. נתון מצולע משוכלל $A_0A_1A_2...A_{14}$. הוכח כי $\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4} + \frac{1}{A_0A_7}$.

חישובים גיאומטריים עם מספרים מרוכבים – תרגילים מתקדמים (IMO)



1. (2002.2) BC הוא קוטר של מעגל שמרכזו O.
A זאת נקודה כלשהי על המעגל עבורה $\sphericalangle AOC > 60^\circ$.
EF מיתר שהוא האנך האמצעי ל-OA, D היא אמצע הקשת הקטנה AB. הישר דרך O שמקביל ל-AD חותך את AC ב-J. הוכח כי J היא מרכז המעגל החסום במשולש CEF.

2. (2004.5) במרובע קמור ABCD האלכסון BD לא חוצה לא את הזווית ABC ולא את הזווית CDA. נקודה P נמצאת בתוכו ומקיימת $\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA$, $\sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA$.
הוכח כי ABCD חסום $\Leftrightarrow$ $AP = PC$.

3. (2000.6) $A_1A_2A_3$ משולש חד-זוויות. K_i הוא עקב הגובה מ-A_i, ו-L_i היא נקודת ההשקה של המעגל החסום לצלע המתאימה. משקפים את הישרים K_iK_j ביחס לישרים L_iL_j. הוכח ששלושת הישרים החדשים יוצרים משולש שקודקודיו על המעגל החסום.

4. (2005.5) ABCD מרובע קמור קבוע, שבו BC, DA שוות אך לא מקבילות. נקודות E, F נמצאות על הצלעות BC, DA בהתאמה ומקיימות DF = BE. הישרים AC, BD נחתכים ב-P ; הישרים BD, EF נחתכים ב-Q ; הישרים AC, EF נחתכים ב-R. הוכח שלכל המעגלים החוסמים של משולשי PQR יש נקודה משותפת נוספת חוץ מ-P, כאשר E, F משתנות.

5. (2010.2) נתון משולש ABC, שמרכז המעגל החסום בו הוא I, ובמעגל החוסם אותו Γ.
AI חותך את Γ שוב ב-D. יהיו E נקודה על הקשת BDC, ו-F נקודה על הקטע BC, עבורן $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle CAB$. G היא אמצע IF. הוכח כי הישרים EI ו-DG נפגשים על Γ.

6. (2011.6) יהא ABC משולש חד-זוויות שחסום במעגל Γ. יהא ℓ ישר משיק למעגל Γ. נסמן ב-ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c את הישרים שמתקבלים על ידי שיקוף הישר ℓ ביחס לישרים BC, CA, AB בהתאמה.
הוכח כי המעגל החוסם של המשולש שנוצר על ידי הישרים ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c משיק למעגל Γ.