תרגיל קומבינטוריקה

1) דני ויוסי משחקים את המשחק הבא עבור k טבעי כלשהו: דני בוחר טבעי כלשהו n ורושם אותו על הלוח ולאחר מכן בכל תור יוסי בוחר טבעי כלשהו x ודני יכול לבחור אם להוסיף אותו או לחסר אותו מהמספר הנוכחי (כלומר יכול להחליף את המספר ב-n-x או ב-n+x) יוסי מנצח אם המספר שמופיע על הלוח הוא חזקה שלמה של k. עבור אילו ערכי k יוסי יכול להבטיח לעצמו ניצחון?

2) נתונות 101 קב' $A_1, A_2 \dots A_{101}$ כולן תתי קב' של $X = \{1,2,\dots,n\}$ נתון כי לכל 50 קב' מתוכן גודל האיחוד הוא יותר מ-$\frac{50}{51}n$ ($\forall I \subset \{1,2,\dots,101\},|I| = 50 \rightarrow |\bigcup_{i\in I} A_i| > \frac{50}{51}n$) צ"ל כי קיימות לפחות 18 שלשות של קב' A_i, A_j, A_k $_{i\neq j\neq k\neq i}$ כך ש:$A_i \cap A_j \neq \emptyset, A_i \cap A_k \neq \emptyset, A_j \cap A_k \neq \emptyset$.

3) ריבוע קסם מסדר n הוא טבלה בגודל $n \times n$ בה רשומים כל המספרים מ-1 ועד n^2 כך שסכום המספרים בכל העמודות ובכל השורות זהה. בריבוע שכזה, מחברים את המרכז של כל שני ריבועים בוקטור שפונה מהתא עם המספר הקטן לגדול, הוכח כי סכום הוקטורים הוא 0.

4) הוכח את הזהות הקומבינטורית: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+u}\binom{2k+u}{k}2^{n-2k-u} = \binom{2n}{n+u}$

5) תהי f פונקציה מכל תתי הקבוצות של $X = \{1,2,\dots,n\}$ ל-$\mathbb{N}$ שמקיימת את התנאים הבאים:

לכל $A \subseteq X$: $f(A) = f(X/A)$

ולכל $A,B \subseteq X$: $f(A \cup B) \leq \max\{f(A), f(B)\}$

הוכח כי f מקבלת לכל היותר n ערכים שונים.

6) בליגת העל יש n קבוצות, עונת משחקים מתנהלת בשני סיבובים, כשבכל סיבוב כל שתי קב' משחקות ביניהן בדיוק פעם אחת ואחת מהן מנצחת (אין מצב של תיקו), הוכח כי קיימת קבוצה A כך שלכל קבוצה אחרת B: או שA ניצחה את B באחד הסיבובים או ש-A ניצחה בסיבוב הראשון קבוצה כלשהי (C) שניצחה את B בסיבוב השני.

7) צפרדע מבצעת קפיצות על נק' השריג, היא מתחילה בנק' (0,0) ובכל תור היא מבצעת קפיצה של 1 למעלה או 1 ימינה, כלומר עוברת מ-(x,y) ל-(x+1,y) *או* (x,y+1) *בכל תור 1 מהם ללא חוקיות מסוימת.*

הוכח שמתוך הנק' שהצפרדע נמצאת בהן בזמן כלשהו, יש ישר שיש עליו לפחות 5772 מתוכן.