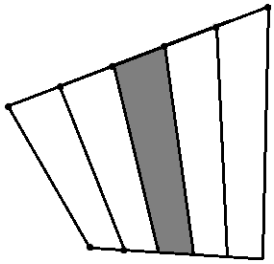
תרגול שטחים

1. א. נקודה נמצאת בתוך משולש שווה צלעות. הוכח כי סכום המרחקים ממנה לצלעות המשולש שווה לגובה המשולש.
ב. כיצד להכליל את הטענה למקרה של נקודה מחוץ למשולש?
ג. כיצד להכליל את הטענה למקרה של משולש כללי – לא בהכרח שווה צלעות?

2. בתוך מצולע משוכלל בעל 2N צלעות נבחרה נקודה. מחברים את הנקודה לכל קודקודי המצולע, וכך נוצרים 2N משולשים. משולשים אלה נצבעו בשני צבעים לפי "צביעת שחמט" – כל שני משולשים סמוכים בצבעים הפוכים. הוכח כי סכום שטחי המשולשים בצבע אחד שווה לסכום שטחי המשולשים בצבע השני.

3. במצולע קמור חסום מעגל (שמשיק לכל צלעותיו). הוכח שאם קו ישר חוצה את השטח ואת ההיקף של המצולע (כלומר מחלק כל אחד מהם לשני חלקים שווים) אזי הישר הזה עובר דרך מרכז המעגל.

4. במשולש ABC נתונים אורכי הצלעות $a = \mathrm{BC}$ ו-$b = \mathrm{AC}$. נקודה D נמצאת על הצלע AB, ונתונים לנו אורכי הזוויות $\angle \mathrm{BCD} = \varphi$, $\angle \mathrm{ACD} = \psi$. אורך הקטע $\ell = \mathrm{CD}$ אינו נתון. מצא נוסחא ל-ℓ באמצעות a, b, φ, ψ.
בתור מקרה פרטי, מצא נוסחה לאורך חוצה הזווית של C באמצעות $a, b, \gamma = \angle C$.



5. א. במרובע כל אחת מבין שתי צלעות נגדיות חולקה ל-5 חלקים שווים, ונקודות החלוקה המתאימות חוברו. כך המרובע חולק ל-5 מרובעים. הוכח כי שטח המרובע האמצעים שווה לממוצע של שטחי 5 המרובעים שנוצרו.
ב. נניח שגם שני צלעות אחרות חולקו לחמישה חלקים שווים כל אחת, וגם נקודות החלוקה בשני הצלעות האחרות חוברו באותה צורה. אז המרובע חולק ל-25 מרובעים. הוכח כי שטח של אחד מהמרובעים שנוצרו שווה לממוצע של שטחים של 25 המרובעים.

6. O הוא מרכז של מעגל שחסום במרובע ABCD. אמצעי האלכסונים של המרובע הם M, N.
הוכח כי M, O, N נמצאים על ישר אחד.

7. מצולע $A_1A_2A_3\ldots A_{2n}$ חסום במעגל. B נקודה על אותו המעגל. המרחקים מהנקודה B לישרים $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2n}A_1$ שווים ל-$d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{2n}$ בהתאמה.
הוכח כי $d_1 d_3 \cdots d_{2n-1} = d_2 d_4 \cdots d_{2n}$.

8. הוכח שלכל מחומש קמור ABCDE, שטחו קטן או שווה לסכום שטחי המשולשים ABC, BCD, CDE, DEA, EAB.

9. (IMO 2006) לכל צלע b של מצולע קמור P נשייך את השטח הגדול ביותר של משולש אשר צלע אחת שלו היא b וכולו מוכל ב-P. הוכח כי הסכום של השטחים המשויכים לצלעות של P גדול או שווה לפעמיים השטח של P.