אולימפיאדה ארצית במתמטיקה – שלב ב'

אסור להשתמש במחשבון.

משך התחרות: 3 שעות.

1. יוסי מתקין תוכנה שנקראת "דלתות". ההתקנה מורכבת מ-100 שלבים. בכל שלב, החל מתחילת השלב השני, התוכנה מציגה על המסך זמן משוער לסיום. הזמן הנותר מחושב לפי הנוסחה $T \cdot \frac{100-K}{K}$, כאשר T הוא כמות הזמן שעבר מאז תחילת ההתקנה בשניות, ו-K הוא מספר השלב שהסתיים. במהלך כל שלב התצוגה על המסך לא משתנה, התצוגה מוחלפת רק בתחילת כל שלב.

השלב הראשון של ההתקנה ארך שנייה אחת, וגם השלב האחרון ארך שנייה אחת, אבל להפתעתו הרבה של יוסי התחזית לזמן הסיום המוצגת על המסך לא השתנתה במהלך כל ההתקנה. כמה זמן סה"כ נמשכה ההתקנה של "דלתות"?

פתרון. התחזית לאחר השלב הראשון היא 99 שניות, כי עברה רק שנייה, וזה מאית מכמות השלבים. לכן גם אחרי השלב מספר 99, התחזית היא שנשארו 99 שניות. זה הזמן שלפי התחזית השלב האחרון אמור לקחת. לכן ממוצע הזמן של 99 שלבים ראשונים זה 99 שניות לשלב. לכן בסה"כ כמות הזמן שיעבור עד לתחילת השלב האחרון היא 99×99 = 9801 שניות. ביחד עם השלב האחרון, ההתקנה תיקח 9802 שניות.

2. בשורה ארוכה של אותיות יש 5772 אותיות.

משה גזר את השורה לשלושה חלקים באורכים של 1998, 2479 ו-1295 אותיות. הוא גילה שאם הוא לוקח את 1295 האותיות הראשונות ומעביר אותן לסוף השורה מתקבלת שורה זהה. כמו כן, אם הוא לוקח את 1998 האותיות האחרונות ומעביר אותן לתחילת השורה, מתקבלת שורה זהה.

מהי הכמות המקסימלית של אותיות שונות בשורה?

פתרון. נסמן את אות מספר k של השורה ב- a_k. כמו כן, למען הנוחות נמשיך את a_k לסדרה אינסופית של אותיות כך ש- $a_k = a_{k+5772}$. את התנאים של השאלה אפשר לרשום בתור $a_k = a_{k+1998}$, וגם $a_k = a_{k+1295}$ לכל k.

קל לראות שאם יש סדרה שיש לה מחזור באורך s ומחזור באורך t, אז יש מחזור גם באורך $s - t$. במקרה שלנו יש מחזור באורך 1998 ובאורך 1295, אז יש גם מחזור באורך 703, וגם מחזור באורך 592 = 1295 – 703, וגם מחזור באורך 111 = 592 – 703, וגם מחזור באורך 37 = 111×5 – 592. אבל 111 כבר מתחלק ב-37.

גם 1998 מתחלק ב-111 ולכן גם ב-37, וגם 1295 = 1110 + 111 + 74 מתחלק ב-37. לכן כל שורה המקיימת את התנאי היא בעלת מחזור 37, וכל סדרה עם מחזור של 37 מקיימת את התנאי. לכן יכולות להיות מקסימום 37 אותיות בשורה.

3. נתון מצולע משוכלל $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$.

פי כמה גדול שטחו מהשטח של הריבוע $A_1A_4A_7A_{10}$?

פתרון. נסמן ב-O את המרכז של המצולע. אפשר להניח כי $OA_i = 1$ (אחרת נגדיל או נקטין את התמונה בלי לשנות את יחס בין השטחים). משולש A_1OA_4 הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים. מכאן קל להבין כי אורך הצלע של הריבוע הוא $A_1A_4 = \sqrt{2}$, ושטח הריבוע שווה 2.

משולש OA_1A_3 הוא שווה צלעות. נסמן ב-B את ההיטל של A_3 על OA_1, וב-C את ההיטל של A_3 על OA_4. אז OBA_3C הוא מלבן. לכן $A_3C = OB = \frac{1}{2}$. לכן $S_{OA_3A_4} = \frac{1}{2}OA_4 \cdot A_3C = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

המצולה המשוכלל מורכב מ-12 משולשים כאלה, לכן שטחו שווה 3.

ובכן היחס בין השטחים של המצולע ושל הריבוע הוא 3:2.

4. ידוע כי $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + x + 3y + 5z + 7t = 4$.
מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הביטוי $x + y + z + t$.

פתרון. ניתן לרשום את המשוואה גם באופן הבא:
$$\left(x+0.5\right)^2 + \left(y+1.5\right)^2 + \left(z+2.5\right)^2 + \left(t+3.5\right)^2 = 5^2$$
נסמן $a = x+0.5,\ b = y+1.5,\ c = z+2.5,\ d = t+3.5$ ונרשום את המשוואה במשתנים החדשים: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 5^2$

טענת עזר: $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}\left(x+y\right)^2$ לכל x, y ממשיים.

הוכחת הטענה: $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}\left(x+y\right)^2 = \frac{1}{2}\left(x-y\right)^2 \geq 0$.

לפי הטענה מתקיימים שלוש אי-שוויונות הבאים:
$$a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}\left(a+b\right)^2;\ c^2+d^2 \geq \frac{1}{2}\left(c+d\right)^2;\ \left(a+b\right)^2 + \left(c+d\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(a+b+c+d\right)^2$$
וניתן להסיק מכך את $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq \frac{1}{2}\left(\left(a+b\right)^2 + \left(c+d\right)^2\right) \geq \frac{1}{4}\left(a+b+c+d\right)^2$

ואזי, חל אי-שוויון $\left(a+b+c+d\right)^2 \leq 10^2$ או במילים אחרות $-10 \leq a+b+c+d \leq 10$.
זאת אומרת ש- $-18 \leq x+y+z+t \leq 2$. נשאר להראות רק שאת החסמים הללו ניתן להשיג:
עבור $a=b=c=d=2.5$ מתקיים $x+y+z+t=2$.
עבור $a=b=c=d=-2.5$ מתקיים $x+y+z+t=-18$.

5. במישור מצויר מצולע קמור בעל N צלעות, וקודקודיו מסומנים. מסמנים K נקודות נוספות בתוך המצולע, כך שאף שלוש נקודות מסומנות לא נמצאות על ישר אחד. יוסי מחבר זוגות של נקודות מסומנות (כולל קודקודי המצולע) בקטעים ישרים, שלא נחתכים זה עם זה (כלומר שלאף שני קטעים לא תהיה נקודה פנימית משותפת).
מהו המספר המקסימלי של קטעים שיוסי יצליח להעביר?

פתרון. ניתן להניח שהמצולה מחולק למשולשים – אחרת יוסי יוכל להעביר אלכסון באחד המצולעים שנוצרו ובכך להגדיל את כמות הקטעים.
נסמן ב- M את מספר המשולשים שקיבלנו. מצד אחד סכומן של כל הזווית של כל המשולשים הינו $180°\cdot \mathrm{M}$. מצד שני זה גם סכומן של זוויות המצולע + סכום הזוויות בכל K הנקודות הפנימיות. סכום הזוויות של המצולע הינו $180°\cdot\left(\mathrm{N}-2\right)$, וסכום הזוויות בנקודות הפנימיות שווה ל- $360°\cdot \mathrm{K}$.
חישבנו את סכום הזוויות בשתי דרכים שונות, אבל אנחנו חייבים לקבל אותה תשובה. כלומר קיבלנו

שוויון: $N-2+2K=M$.
נסמן ב- E את מספר הצלעות. אם נחבר מספר צלעות בכל המשולשים עם מספר צלעות של המצולע אז נספור את כל הצלעות בפעמיים. כלומר חל שוויון הבא $2E=3M+N$. מספר הקטעים שיוסי העביר הינו מספר הצעות פחות מספר צלעות של המצולע:

$$E-N=\frac{3M+N}{2}-N=\frac{6K+3N-6+N}{2}-N=3K+N-3$$

זאת אומרת שללא תלות בתרחיש מספר קטעים שנעביר הינו $3K+N-3$. ולכן זהו גם המקסימום.

6. פתור את המשוואה $x^{x^{5772}}=5772$ עבור x ממשי.

תשובה. $\pm\sqrt[5772]{5772}$.

פתרון. נניח ש-x חיובי. אכן, אם x שלילי, אז החזקה צריכה להיות שלמה (אחרת הביטוי לא מוגדר) וגם זוגית (אחרת אגף שמאל שלילי וימין חיובי) וזה גורר שמספיק לפתור משוואה זהה $y^{y^{5772}}=5772$ עבור $y=-x$ (כלומר מספיק לפתור עבור x חיובי, רק לבדוק עם החלפת סימן נותנת פתרון).

ניקח לוגריתם משני הצדדים: $\log 5772=\log x^{x^{5772}}=x^{5772}\log x$.

נכפיל ב- 5772 ונקבל: $5772\log 5772=5772\,x^{5772}\log x=x^{5772}\log x^{5772}$.

נסמן $t=x^{5772}$ ונקבל $5772\log 5772=t\log t$.

עבור $t<1$ מתקיים $t\log t<0$, ולכן $t\ge 1$. בתנאי זה פונקציה $t\log t$ עולה ממש ולכן חד-חד ערכית. במילים אחרות אם $t\log t=a\log a$ אז $t=a$. בגלל ש- $5772\log 5772=t\log t$ מתקיים $t=5772$. ולכן $x=\sqrt[5772]{t}=\sqrt[5772]{5772}$ פתרון יחיד ל-x חיובי.

קל לראות שאם נחליף סימן יתקיים שוויון אזי התשובה $x=\pm\sqrt[5772]{5772}$.

7. מצא את הפירוק לגורמים ראשוניים של המספר $5^9+999000-2^9$.

פתרון. נשים לב כי $999=1000-1=2^3\cdot 5^3-1$.

$$5^9+999000-2^9=5^9+(1000-1)\cdot 1000-2^9=5^9+\left(2^3\cdot 5^3-1\right)\cdot 2^3\cdot 5^3-2^9=$$
$$=5^9+5^6\cdot 2^6-2^3\cdot 5^3-2^9=5^6\cdot\left(5^3+2^6\right)-2^3\cdot\left(5^3+2^6\right)=\left(5^6-2^3\right)\cdot\left(5^3+2^6\right)=$$
$$=\left(5^4+5^2\cdot 2+2^2\right)\left(5^2-2\right)\cdot\left(5+2^2\right)\left(5^2-5\cdot 2^2+2^4\right)=$$
$$=\left(625+50+4\right)\cdot 23\cdot 9\cdot\left(5+16\right)=679\cdot 23\cdot 9\cdot 21=\left(630+49\right)\cdot 23\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7=$$
$$=7\cdot\left(90+7\right)\cdot 23\cdot 3^3\cdot 7=\boxed{3^3\cdot 7^2\cdot 23\cdot 97}$$