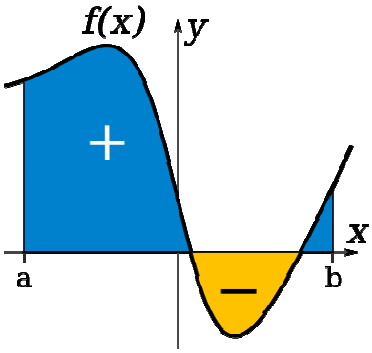
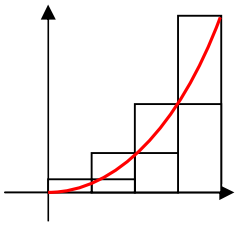
פרק א' – אינטגרלים



בדרך כלל חישוב אינטגרלים מסמל חישוב שטחים. לדוגמא: שטח של מעגל, נפח של פירמידה או שטח פנים של כליפה כדורית.
בהינתן פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (ממשיים לממשיים) נסמן שטח מתחת לגרף הפונקציה בקטע $[a,b]$ ב- $\int_a^b f(x)dx$ ונקרא לזה אינטגרל של f בקטע $[a,b]$.
לדוגמא: נחשב אינטגרל פשוט ביותר $\int_a^b xdx$.
$\int_0^t xdx=\frac{t^2}{2}$ כיוון שאזור מתחת ל - $f(x)=x$ הינו משולש ישר זווית בעל שני ניצבים באורך t. ומסקנה מכך:

נחשב את $\int_0^1 x^2dx$. כיצד לעשות זאת?
נקרב את הפונקציה בצורה פשוטה ביותר:
בקטע $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ מתקיים $\left(\frac{k}{n}\right)^2\le x^2\le\left(\frac{k+1}{n}\right)^2$
ובבירור אי-שוויון ישמר לאחר אינטגרציה:



אם נחבר את אי-שוויונות הנ"ל עבור כל $k=1,2,\dots n-1$ נסיק כי

צד הימין ניתן לכתוב גם כך: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$. וכך קיבלנו שהפרש בין צד ימין לצד שמאל הוא סה"כ n^{-1} - ערך די קטן עבור n גדול. ולכן ניתן להגיד

קיימת נוסחה ידועה (ידועה למיעוט) $\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$. אזי

וקיבלנו תשובה

מה לגבי $\int_0^t x^2 dx$?

כמובן אפשר היה לעשות אותו התהליך ולקבל את התשובה: $\int_0^t x^2 dx = \frac{t^3}{3}$.
אבל אפשר לראות זאת בדרך אחרת:
נתבונן בגרף הפונקציה $y = x^2$, ובהעתקה $(x, y) \longmapsto (\lambda x, \lambda^2 y)$.

- מה קורה לשטח תחת ההעתקה? מוכפל ב-λ^3.
  כיוון שהעתקה $(x, y) \longmapsto (\kappa x, y)$ מכפילה את השטח פי κ. והעתקה המקורית היא פשוט צירוף של שני העתקות $(x, y) \longmapsto (\lambda x, y)$ ו- $(x, y) \longmapsto (x, \lambda^2 y)$.
- מה קרה לאזור מתחת ל- $y = x^2$ בתחום $[a, b]$?

  הפך לאזור מתחת ל- $\frac{y}{\lambda^2} = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2$ (כלומר $y = x^2$) בתחום $[\lambda a, \lambda b]$.

וזה גורר קיום הקשר הבאה

ובפרט

שיקול דומה ניתן לעשות גם עבור $y = x^\alpha$.

כעט ניתן "להסביר" את הסימון של אינטגרל $\int_a^b f(x)dx$.

למעשה $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$ כאשר $a = x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ $(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$ ו- Δx_i כולם קטנים, והקירוב הנ"ל משתפר עם הקטנת Δx_i-ים. וכדי לסמן את התוצאה פשוט החליפו את Δ ב- d לנוחיות כדי לסמן ערכים ממש קטנים (בשפה מדעית אינפיניטסימאליים), ואת הסכום דיסקרטי החליפו באינטגרל.
סימון: בהמשך גם נרשום d לפני משתנה אינפיניטסימאלי.
הערה: אם ידועה ש- $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ אז כיצד לחשב את f מי F?
למעשה די פשוט $F(x + dx) - F(x) = \int_x^{x+dx} f(t)dt = f(x)dx$ בתנאי ש- f כמעט ולא משתנה בתחום $[x, x + dx]$. ונקבל את הקשר:

לפונקציה F כזאת נקרא פונקציה קדומה של f. למעשה תמיד יש כמה פונקציות קדומות ל-f כי אם F קדומה של f אז גם $F + const$ קדומה של f. ונשתמש בסימון $\int f(x)dx = F(x) + const$. לפעולה $\int f(x)dx$ קוראים אינטגרל לא מסוים.

נפח של פירמידה

נגדיר בציר-z את הכיוון של גובת הפירמידה (כיוון מאונך לתחתית הפירמידה). נניח שראש הפירמידה נמצה ב-0, והתחתית הפירמידה שייכת למישור $z = h_0$ (h_0 – הינו גובה של הפירמידה). ונניח ששטח תחתית הפירמידה היינו S. אם נתבונן בחיתוך (נקודות משותפות) של פירמידה עם מישור דק $h \le z \le h + dh$ (dh אינפינטסימאלי).

נפח של החיתוך שווה בקירוב ל - $S\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 dh$.

מכיוון ש-$S\left(\frac{h}{h_0}\right)^2$ הינו שטח החיתוך של מישור $z = h$ עם הפירמידה. אזי, כשה נחתוך את הפירמידה למישורים דקים בעובי dh נקבל כי נפחה היינו

V

לא השתמשנו בצורת בסיס הפירמידה בכלל! כלומר **נוסחה נכונה ללא תלות בצורת בסיס הפירמידה!** – פירמידה משולשת, מרובעה או קונוס.

נפח כדור

טענה: אם יש שני צורות כאלו שלכל z_0 - שטח חתך של צורה ראשונה עם מישור $z = z_0$ שווה לשטח חתך של צורה שנייה עם אותו המישור $z = z_0$, אזי נפחי הצורות שווים.
טענה זו ברורה, ומוכיחים אותה באמצאות שיקולים שעשינו מקודם.
נתבונן בשלושת הצורות הבאות:

- כדור בעל רדיוס R: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.
- קונוס: $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z\epsilon[-R, R]$.
- צילינדר: $x^2 + y^2 \leq R^2$,$z\epsilon[-R, R]$.

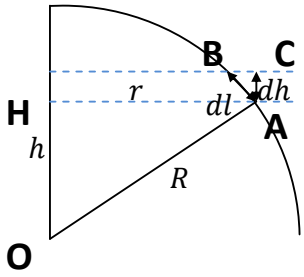
נחשב שטח חתך של כל אחד מהם עם מישור $z = h$:

- כדור: $x^2 + y^2 \leq R^2 - h^2$, כלומר השטח הוא $\pi(R^2 - h^2)$.
- קונוס: $x^2 + y^2 \leq h^2$, השטח הוא πh^2.
- צילינדר: $x^2 + y^2 \leq R^2$, השטח הוא πR^2.

קיבלנו תוצאה מעניינת:
שטח חתך קונוס + שטח חתך כדור = שטח חתך צילינדר
אזי כנ"ל נכון גם עבור נפחים. נפח של צילינדר הינו $2\pi R^3$. נפח של קונוס הינו $\frac{2}{3}\pi R^3$ (לפי נוסחת נפח הפירמידה). ולכן נפח של כדור הינו $\frac{4}{3}\pi R^3$.

שטח פנים של ספרה

נתחיל מקצת תיאוריה כללית – נתחיל ממצב פשוט הבא:
קיים קו קצר באורך dl במישור yz, במרחק r (בקירוב טוב) מציר z. ונסובב אותו מסביב לציר z (ב- 360 מעלות). ונתבונן בגוף שיוצא מזה - כלומר כל הנקודות שדרכם עבר הקו הקצר במהלך הסיבוב.
איזה שטח פנים יש לו? ברור שהתשובה היא $2\pi rdl$.
עכשיו כדי לחשב את השטח פנים של ספרה מספיק לחשוב רק על מישור yz, ועל מעגל במקום ספרה.
שוב נתבונן במישור דק $h \le z \le h+dh$, וחיתוך שלו עם המעגל. זה הינו קו קצר באורך dl (למעשה יש 2 קווים מופרדים אבל נתייחס רק לאחד מהם). וקו זה נמצה במרחק $r=\sqrt{R^2-h^2}$ מציר ה - z (R הינו רדיוס של הספרה). ולכן רק נשער חישוב אינטגרל: $\int_{h\in[-R,R]} 2\pi rdl$. אבל לא מובן ישירות כיצד לקשר בין dl ל- dh? שניהם קטנים אז הפרשם קטן, אבל יחס די ממשי.
למעשה ניתן לחשב יחס מדמיון משולשים $\Delta ABC \sim \Delta AOH$ (ראה איור). והיחס יוצא $\frac{dl}{dh}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AH}}=\frac{R}{r}$. לאחר הצבה $rdl=Rdh$ נקבל שטח פנים



S

הערה 1: היינו יכלים לחשב שטח פנים של חתך ספרה (לא דק): $a \le z \le b$.
רק על ידי שינוי תחום אינטגרציה - $\int_a^b 2\pi Rdh = 2\pi R(b-a)$.
וזו תוצאה יפה כי שטח תלוי רק בעובי החתך ולא במיקומו!

הערה 2: תשימו לב לנוסחה הבאה: $V=\frac{RS}{3}$ כאשר V,S,R הינם רדיוס, שטח פנים, ונפח (כל שלושתם של כדור) בהתאמה.
לא מזקירה נוסחה זאת את נוסחת נפח פירמידה?
יש סיבה לכך – ניתן לקשר נפח של כדור עם שטח פניו באופן הבא: נתבונן ביחידת שטח קטנה dS על פני הכדור. יחידה זו די מישורית, ומישור שמקרב אותה נמצא במרחק R ממרכז הכדור. זאת אומרת שנפח נמצאה בין מרכז הכדור ל- dS הינו $\frac{RdS}{3}$ כלומר לאחר אינטגרציה נקבל שוב $V=\frac{RS}{3}$.

מדי פעם מוציאים קשרים מפתיעים במתמטיקה – בו נתבונן בשאלה הבאה:
"נגריל $n+1$ מספרים אקראיים ממשיים ובלתי תלויים בין 0 ל-1.
מה הסתברות שהראשון הכי גדול?"
תשובה ברורה – $\frac{1}{n+1}$ כי לכל אחד מהם יש אותה הסתברות להיות הכי גדול,
וסיכוי שיש כמה הכי גדולים היא 0 (בכלל הסתברות שיש שניים שווים היא 0).
אבל נצפה בשאלה ממבט אחר:
אם המספר האקראי הראשון שייך ל-$[x, x+dx]$ (הסתברות לכך הינה dx)
אזי הסתברות שכל n מספרים אקראיים אחרים קטנים ממנו הינה x^n. ולכך הסתברות הכוללת לאירועה זה הינו $x^n dx$. אז אם נעבור על כל הערכים שמספר האקראי הראשון יכול לקבל, נסיק כי התשובה לשאלה הינה $\int_0^1 x^n dx$.
ולכן מתקיים שוויון

חיסרון בהוכחה זאת הינו התנאי ש-n חייב להיות טבעי, למרות ששוויון

נכון לכל $\alpha \neq -1$ (נראה בהמשך).
הערה: כדי להיזהר בשימוש בהסתברות כי קל לקבל סתירה במתמטיקה.
נתעמק בתחום הנ"ל בעתיד.

בסעיף זה נחשב את האינטגרל $\int \frac{dx}{x}$. נוסחה שראינו למעלה לאינטגרל של x^{α} ממש לא מתאימה למקרה זה. בגלל זה נקדיש לו מקום משלו. נינשא לעשות אותו טריק שעשינו מקודם:
נתבונן בטרפז עקום – טרפז חסום עלי ידי שלושת ישרים $x = a, x = b, y = 0$ וגרף הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ $(0 < a < b)$. ונפעיל העתקה $(x, y) \mapsto \left(\lambda x, \frac{1}{\lambda} y\right)$. העתקה שומרת שטח ומעבירה את הטרפז העקום לטרפז שחסום על ידי שלושה ישרים $x = \lambda a, x = \lambda b, y = 0$ וגרף הפונקציה $\lambda y = \frac{\lambda}{x}$ (כלומר אותו הגרף $y = \frac{1}{x}$). מכיוון ששטח של שני הטרפזים העקומים זהה קבלנו שוויון:

אם נסמן $f(t) = \int_1^t \frac{dx}{x}$ אז השוויון הנ"ל יראה כך

ובפרט אם נציב $b = 1$ (ונזכר ב- $0 = \int_1^1 \frac{dx}{x}$) נקבל: $(f(1) =$

יש הרבה פונקציות שמקיימות את התנאי, אבל כאלו שגם רציפות יש רק סוג אחד: $f(x) = log_c x$ עבור c מסויים. **למה?**
הסבר: נסמן את $f(2) = t$ אזי לפי נוסחה ישירות נובאה ש- $f(2^n) = nt$ לכל n שלם. ובנוסף $f\left(2^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{t}{m}$ כי $mf\left(2^{\frac{1}{m}}\right) = f(2) = t$.
וכך קיבלנו שלכל מספר q רציונאלי מתקיים $f(2^q) = tq$.
אי-אפשר לעבור למספרים אי-רציונאליים סתם כך, אבל בגלל הרציפות של f אכן חייב להתקיים $f(2^x) = tx$. וזה מראה ש-f פונקציה הפוכה לחזקה ולכן הינה לוגריתם.

את הבסיס של הלוגריתם מסמנים במספר $e \approx 2.71828 \dots$ (על שם *Euler*). ואת הפונקציה מסמנים ב – (לשם קיצור של logarithm natural)

אבל כיצד ניתן לחשב את e?
די פשוט – נשים לב כי $t \in \left[1{,}1 + \frac{1}{n}\right]$ עבור $\frac{1}{t} \approx 1$ וזה נותן הערכה הבאה:

וזה שכול ל- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$. לאחר הכפלה ב-$n$ נקבל

אם נעלה את e בשני האגפים נקבל את הקירוב

פרק ב' – נגזרות

פונקציה כללית הינה אובייקט מסובך, בגלל זה ננסה לפשט אותה באמצאות קירוב על ידי קו ישר (בהמשך נכתוב "קירוב ליניארי"). יש מלא דרכים לקרב פונקציה באמצאות קו ישר... אז איזה ישר נבחר? או מה השיטה? אז קודם נבחר נקודה x_0 ונבחר ישר אשר מקרב פונקציה בסביבה של x_0 הכי טוב בין כל הישרים. לישר זה נקרא ישר משיק (או פשוט "משיק").

ניתן דוגמא: $f(x) = 10 + 2x + x^2$ נקרב ב- $x_0 = 0$.
יהי $y = a + bx$ ישר המשיק. על מנת להעריך דיוק הקירוב ניקח הפרש:

כיוון ש - $x \approx 0$ החלק המשמעותי בהפרש הינו $a - 10$ ואז כדי לקרב טוב עבור $x \approx 0$ חייב להתקיים שוויון $a = 10$. אז הפרש הפך להיות:

y

כמובן $b - 2 - x$ הכי קטן (בערכו המוחלט) עבור כל $x \approx 0$ כשה $b - 2 = 0$.
וקיבלנו את משוואת המשיק שלנו $y = 10 + 2x$.

לא לכל פונקציה ניתן לעשות קירוב ליניארי טוב, עלה רק עבור פונקציות טובות.
כפי שכבר ראינו הקירוב הליניארי $y = a + bx$ מקיים $y(x_0) = f(x_0)$. חלק לא מעניין במיוחד. כלומר נתבונן בעיקר בשיפועה - b, ונסמן אותו ב-$f'(x_0)$.
ונקרה ל-f' נגזרת של f. ונקבל כי משוואת המשיק הינה

אבל כיצד לחשב את $f'(x_0)$?

$0 \approx$

נעביר אגפים ונקבל $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$. ונצפה לכך שיהיה כמאט שוויון עבור x קרוב מאוד ל- x_0. כלומר ניתן לכתוב ש - $f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$.
בגלל המשוואה הנ"ל מסמנים נגזרת גם ב - $f' = \frac{df}{dx}$ $(f'(x) = \frac{df}{dx}(x))$.
לדוגמא: $f(x) = x^2$ אזי $f'(x) = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{dx(2x+dx)}{dx} = 2x + dx$ כלומר קיבלנו ש- $(x^2)' = 2x$.
הערה: אם x נקודת מקסימום או מינימום של f אזי $f'(x) = 0$.

השוויון $f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$ מזכיר נוסחה שראינו בחלק הקודם. וזה מראה שחלה נוסחה הבאה $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$. לנוסחה זאת קוראים "נוסחת ניוטון-לייבניץ." נוסחה זאת מקשרת בין נגזרת לאינטגרל. וזה מאפשר ישירות לחשב נגזרת למספר פונקציות:

אבל בו נחזור לחיפוש תכונות של נגזרת. קודם כל בבירור כי מתקיים:

אבל מה לגבי כפל $(f \cdot g)'$?

$d(f \cdot g) = (f$

כלומר **מתקיים:** $(f \cdot g)' = \frac{d(fg)}{dx} = \frac{gdf+fdg}{dx} = g \cdot f' + g' \cdot f$

שוויון זה יש תמונה גיאומטרית: נצפה במלבן שאורכי צלעותיו הינם f ו- g אז שטחו הינו $f \cdot g$. אזי לפי האיור רואים שאם נגדיל x ב- dx אז שטח יגדל ב- $gdf + fdg + dfdg$ כאשר $dfdg$ זניח.

נדגים את הכלל $f(x) = x, g(x) = x^2$ אזי

$(f \cdot g)$

שכבר ידענו...
אז בו נעשה משהו יותר מעניין:
יהי $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. אזי $f(x) \cdot g(x) = 1$ ולכן מתקיים $(f \cdot g)' = 0$.
אבל לפי הנוסחה מקבלים כי

$0 = (f \cdot g)'$

וכך הסקנו כי

או במילים אחרות $d\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{df}{f^2}$.

לדוגמא ניקח את $f(x) = x^n$ ונקבל כי $(x^{-n})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$, כלומר הנוסחה $(x^n)' = nx^{n-1}$ נכונה לכל n שלם.

נוסחה לחילוק: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + \left(\frac{1}{g}\right)' \cdot f = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$.

מה לגבי הרכבה: $\big((f \circ g)(x)\big)' = \big[f\big(g(x)\big)\big]'$?
למעשה הכול די פשוט: $\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{d(f \circ g)}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

כיוון שלא קל לראות את התמונה בנוסחאות... ניתן תיאור גיאומטרי:
נגיד נקודה מטיילת במישור ומיקומה הינו $\big(x(t),y(t)\big)$, כאשר t זה זמן.
ונניח שהתקיימו שני שוויונות: $y=f(x)$ ו- $x=g(t)$.
לאחר dt (שינוי של זמן) קואורדינאטות x ו- y השתנו ב- dx ו- dy בהתאמה.
כיוון ש- $y=f(x)$ מתקיים $\frac{dy}{dx}=f'(x)$. ובנוסף $x=g(t) \Leftarrow \frac{dx}{dt}=g'(t)$.
בבירור מתקיים $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f'(x)g'(t)$
נזכר ב- $\frac{dy}{dt}=\big((f\circ g)(t)\big)'$ (כיוון ש-$y=f\big(x(t)\big)=f\big(g(t)\big)$).
ושוב קיבלנו את הנוסחה: $\big[f\big(g(x)\big)\big]'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$
נדגים את הכלל: ניקח $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=x^\alpha$.

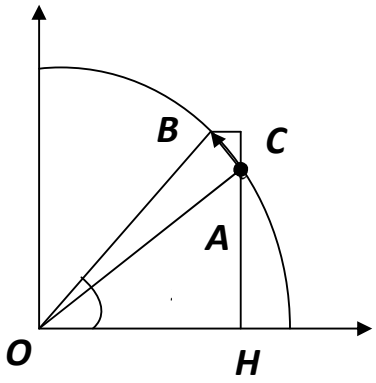
עבור α שלם.
מה לגבי מקרה כללי? קיבלנו קשר $[\ln x^\alpha \ln(x^\alpha)]'=\frac{(x^\alpha)'}{x^\alpha}$. אבל מצד שני:

וכך קיבלנו קשר $\frac{(x^\alpha)'}{x^\alpha}=\frac{\alpha}{x}$ וסוף סוף הסכנו ש - $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ (לכל α).

הערה: קיבלנו שיטה לחשב נגזרת לכל פונקציה שמורכבת מפונקציות פשוטות שעבורן אנחנו יודעים לחשב נגזרת, באמצאות פעולות חשבון והרכבה.

נגזרות של פונקציות טריגונומטריות

נינשא לחשב נגזרות של פונקציות טריגונומטריות. נתחיל מ- $\sin$ ו- $\cos$.
נזכר בתכונה גיאומטרית של $\sin$ ו- $\cos$: (ראה איור)
לפי האיור נתן לראות כי קיים דמיון משולשים $\Delta OAH \cong \Delta ABC$. ובפרט מתקיימים גם שני יחסים הבאים:



(

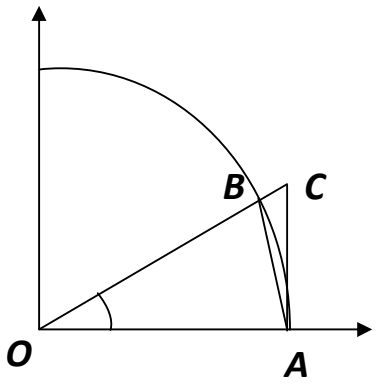
כיוון ש-

$AB = dx, AC =$

$OA = 1, OH =$

אזי $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ ו- $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$

ניתן להראות זאת בדרך אחרת. אבל קודם נצטרך בחישוב היחס: $\frac{\sin x}{x}$ כאשר $x \to 0$. כיצד לעשות זאת? שוב בעזרת גיאומטריה: נשים לב לתכונות הבאות – שטח של משולש ΔOAB שווה ל- $\frac{1}{2}\sin x$, בנוסף שטח של משולש ΔOAC שווה ל- $\frac{1}{2}\tan x$, ולבסוף שטח של משולש עקום $\Delta O\widetilde{AB}$ (כאשר $\widetilde{AB}$ - קשת) שווה ל- $\frac{x}{2}$ כיוון שמשולשים מוכלים אחד בשני $\Delta OAB \subset \Delta O\widetilde{AB} \subset \Delta OAC$,



חל אי-שוויון בין שטחיהם - $\sin x < x < \tan x$.
לפי אי-שוויון השמאלי מתקיים $\frac{\sin x}{x} < 1$.
לפי אי-שוויון הימני מתקיים $\cos x < \frac{\sin x}{x}$.
אזי $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ עבור $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
ברור כי כאשר $x \approx 0$ אז $\cos x \approx \cos 0 = 1$.
ולכן מתקיים כי $\frac{\sin x}{x} \to 1$ כאשר $x \to 0$.

נחזור לחישוב של נגזרות.
אבל קודם כל נזכר בשני נוסחאות טריגונומטריות הבאות:

co

si

$(\sin x)'$

כיוון ש- $\frac{\sin\frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}} = 1$ ניתן להסיק כי $(\sin x)' = \cos x$.

$(\cos x)'$ =

שוב, בגלל השוויון $\frac{\sin\frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}} = 1$ מסיקים כי $(\cos x)' = -\sin x$.

מה לגבי tan?

$(\tan x)'$

פונקציות הפוכות

קודם כל "מה זה פונקציה הפוכה?":
בהינתן פונקציה f, פונקציה הפוכה (שמסמנים אותה) f^{-1} זו פונקציה שמקיימת לכל x (בתחום הגדרתה) את המשוואה $f^{-1}\big(f(x)\big)=x$.
הערה: ישירות מכאן ניתן לראות שבנוסף מתקיים $f\big(f^{-1}(x)\big)=x$.

דוגמאות חשובות:

- $\ln x$ הינה פונקציה הפוכה של e^x.
- פונקציה ההפוכה של x^n הינה $x^{\frac{1}{n}}$.
- $\arcsin x,\ \arccos x$ ו- $\arctan x$ הינן פונקציות ההפוכות של $\sin x,\ \cos x$ ו- $\tan x$ בהתאמה. כיוון שפונקציות טריגונומטריות הינן מחזוריות לא קיימות פונקציות הפוכות ממש, עלה רק לתחומים מצומצמים. (לדוגמה arccos מחזיר ערכים בתחום $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$)

מה ניתן להגיד לגבי נגזרת של פונקציה ההפוכה?
ממש פשוט נגזור את שני צדדי של המשוואה $f^{-1}\big(f(x)\big)=x$ ונקבל

בו נדגים את השימוש בנוסחה:
ניקח $y=f(x)=\sin x$ אזי $x=\arcsin y$. מה ניתן להגיד על נגזרת של arcsin? לפי הנוסחה הנ"ל מתקיים

כלומר

נוסחא זאת לא ממש שימושית כי מופיעה x בצד הימני... אז נתפטר ממנו. כיצד לבטא את $\cos x$ באמצאות y? ממש קל!

כך קיבלנו ש-

נינן דוגמה נוספת,
$y=\tan x$ $(x=\arctan y)$. ונחשב את נגזרת של arctan. לפי נוסחה הנ"ל:

כלומר

ולפי נוסחא טריגונומטרית $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$ מקבלים ש- $\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$.

ודוגמא אחרונה:

$y = \ln x$ $(x = e^y)$. אזי לפי הנוסחה $\frac{de^y}{dy} \cdot \ln' x = 1$. כלומר

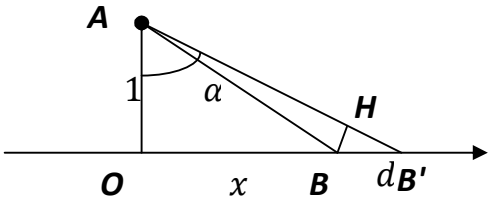
מה לגבי נגזרת של a^x?

לסיכום נרשום את הנוסחאות שקיבלנו:

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(e^x)' = e^x$

קיים גם שיקול גיאומטרי שמאפשר למצוא את $(\arctan x)'$.
נתבונן בתמונה הבאה: HB מאונך ל- AB', AO מאונך ל-BO.
ובנוסף נתונים $AO = 1,\ OB = x,\ BB' = dx,\ \measuredangle BAB' = d\alpha,\ \measuredangle OAB = \alpha$
בתנאים הללו בנוסף ניתן להראות ש- $\tan\alpha = x$ ו- $AB = \sqrt{1+x^2}$.
בגלל דמיון משולשים $(\Delta B'OA \cong \Delta B'HB)$ מתקיים $\frac{BH}{BB'} = \frac{AO}{AB'}$.
בנוסף ניתן להראות ש- $AH \approx AB' \approx AB = \sqrt{1+x^2}$ כיוון ש- dx קטן.
וגם $BH = AH \cdot d\alpha = \sqrt{1+x^2} \cdot d\alpha$. וכך קבלנו $\frac{\sqrt{1+x^2}d\alpha}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, כלומר:

נפעיל אינטגרל לשני הצדדים ונקבל



$\int \frac{dx}{1+x^2}$

כלומר,

(ar

קיים שיקול דומה גם עבור arcsin.

<u>שיטות לחישוב אינטגרלים</u>

החלפת משתנים: יהי $y = f(x)$ עבור f גזירה. אזי מתקיים

$$\int g(y$$

דוגמא: כיצד לחשב אינטגרל $\int x(1+x^2)^n dx$?
נגדיר $y = x^2$ $(dy = 2xdx)$, כלומר

$$\int x(1+x$$

דוגמא נוספת: חשב את $I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx$. נציב $x = \frac{1}{y}$ $(dx = -\frac{dy}{y^2})$.

$$I = \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{1}$$

הערה: $y = \infty \Leftrightarrow x = 0$ וגם $y = 0 \Leftrightarrow x = \infty$

$$\int_{x=0}^{x=\infty} \frac{\ln y}{1+y}$$

קיבלנו ש- $I = -I$. זאת אומרת ש- $I = 0$.

אינטגרציה בחלקים: נזכר בנוסחה $d(f \cdot g) = gdf + fdg$. נפעיל אינטגרציה לשני הצדדים ונקבל

ניתן לרשום גם כך

או במילים אחרות,

$$\int g$$

דוגמא: נחשב את $\int x \cos x \, dx$.
נשתמש בנוסחה עבור $g(x) = x$ ו-$f'(x) = \cos x$ (כלומר $f(x) = \sin x$),

$$\int x \cos x \, dx$$

חישוב סכומים ארוכים

כיצד לקרב סכומים כמו $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$ או $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ עבור n גדול?

נתחיל מי - $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$. נזכר בדרך שבו חישבנו אינטגרלים בהתחלה, ונחשב את $\int_1^2\frac{dx}{x}$. אם נחלק את התחום $[1,2]$ ל-n חלקים באורך $\frac{1}{n}$. נראה שסכום $\sum_{k=1}^{n}\frac{1/n}{1+\frac{k}{n}}$ מקרב טוב את האינטגרל $\int_1^2\frac{dx}{x}$ בהגדרתו. כלומר,

ואת האינטגרל $\int_1^2\frac{dx}{x}$ אנחנו יודעים לחשב, תשובה היא $\ln 2$. קיבלנו תוצאה:

נעבור לסכום השני:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+}$$

כך מצאנו דרך (לא יעילה) לחשב את π.

הערה: דרך מקובלת (פורמאלית) לניסוח של קירובים עלו מתבצעת באמצעות מוסג "גבול" (באנגלית "limit"). ניתן לקרוא עליו בויקיפדיה.

<u>תרגילים</u>

1)אורכי של שני מקצועות מצטלבים של ארבעון, הינם a ו- b. הזווית בין הכיוונים שלהם היא α, והמרחק בין הישרים שלהם h. האם ניתן על סמך נתונים אלה לחשב את נפחו? אם כן, לפי איזה נוסחא?

2)נתונים מספרים ממשיים $a,b,c>0$ מצא את הערך המרבי של $ax+by+cz$ בתנאי ש- $x^3+y^3+z^3=1$ ו- $x,y,z\geq 0$.

3)חשב את

4)חצי המישור העליון הוא שדה, וחצי המישור התחתון הוא יער. שפן לבן מסוגל לרוץ בשדה פי 1.5 יותר מהר מאשר ביער. כיצד למצוא את המסלול המהיר ביותר עבור השפן הלבן שמחבר שתי נקודות נתונות במישור?

5)הוכח את האי-שוויון

$$\frac{a^5}{b^5}+\frac{b^5}{c^5}+\frac{c^5}{a^5}\geq\frac{(a+1)^5}{(b+1)^5}+\frac{(b+1)^5}{(c+1)^5}+\frac{(c+1)^5}{(a+1)^5}$$

עבור a,b,c חיוביים.

6*)$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ מצולע קמור, שקודקודיו שייכות למעגל C. בנוסף לכל $i\in\{1,2,3,4\}$ קטעים A_iA_{i+4} נחתכות בנקודה B ו- $\measuredangle A_iBA_{i+1}=45°$.
נסמן ב- S_i את שטח של אזור החסום על ידי קטעיםBA_i, BA_{i+1} ומעגל C.
הוכח ש- $S_1+S_3+S_5+S_7=S_2+S_4+S_6+S_8$.

7**)חשב את