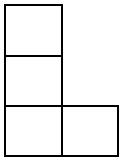
כ"ט בסיון ה'תשע"ב מחנה קיץ 19 יוני 2012

תחרות קבוצתית

1. נגדיר $n?=f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n$ (כאשר $f_1=f_2=1$, $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$). הוכיחו כי $\frac{(m+n)?}{m?\cdot n?}$ שלם.

2. יהי ABC משולש חד-זוויות, H נקודת מפגש הגבהים שלו, O מרכז המעגל החוסם, R הרדיוס של אותו המעגל. הוכיחו: $\mathrm{OH}^2+\frac{\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}\cdot\mathrm{CH}}{R}=R^2$.



3. על לוח משבצות 5×7 סומנה משבצת אדומה. רוצים לכסות את הלוח על ידי צורות של 4 משבצות (כמו בציור) שיכולו להתלכד רק במשבצת אדומה. עבור איזה בחירה של משבצת אדומה זה אפשרי?

4. כל נקודה במרחב תלת-ממדי צבועה באחת מ-5 צבעים, וכל הצבעים מופיעים.
הוכח כי קיים מישור שצבוע ב-4 צבעים לפחות.

5. במשולש ABC: AK, BL גבהים, AU, BV חוצי זוויות (כאשר K, L, U, V על צלעות המשולש), P, Q נקודות ההשקה המעגל החסום עם הצלעות AC, BC. הוכיחו כי PQ, LK, VU נפגשים בנקודה אחת.

6. על לוח משבצות 9×9, נצבעו באדום 46 משבצות. הוכיחו: קיים גוש של 2×2 שבו יש לפחות 3 משבצות אדומות.

7. בארבעון ABCD העבירו כדור חסום וכדור שחסום מבחוץ לפאה ABC. הוכיחו שנקודות ההשקה עם הפאה ABC צמודות איזוגונלית במשולש ABC.

8. נתונה סדרת טריבונצ'י $t_1=t_2=1,\ t_3=2$, $t_{n+3}=t_n+t_{n+1}+t_{n+2}$. הוכח כי $t_{p^2+p+1}\cdot t_{p^2-1}\cdot t_{p-1}$ מתחלק ב- p לכל $p\neq 11$ ראשוני.

9. עבור $a,b,c>0$ הוכיחו $\sum_{cyc}\frac{ab}{a+4b+4c}\le\frac{a+b+c}{9}$.

10. פיראט שט מסביב לים העגול, שאורכו p קילומטרים, כאשר p מספר שלם וראשוני. נקודת התחלה שלו שלמה אך לא ידועה. מהירות הפיראט היא b קמ"ש בכיוון השעון, שלמה אך לא ידועה גם כן. (כך שבכל שעה עגולה הפיראט נמצא ליד אחד מה-p סימני קילומטר שיש בים העגול). תותח של משמר החופים יודע לירות פעם בשעה בדיוק, בכל שעה עגולה. מהי כמות שעות המינימאלית בה משמר החופים יכול בוודאות להרוג את הפיראט?

11. מצא את כל הפתרונות למשוואה $abc\left(a^2+b^2+c^2\right)=2^{30}+3^{20}$ כאשר a,b,c שלמים.

הערה. בעצם, בשאלה האחרונה ניתן לפתור כאשר באגף הימני יש מספר כלשהוא שהוא $2\pmod{11}$.

בהצלחה!